

Partielle Differentialgleichungen für Nichtmathematiker

2. Übung: Modellierung mittels partieller Differentialgleichungen

1. Eine kugelsymmetrische Welle im Raum wird beschrieben durch die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

für die Funktion $u(t, r)$, wobei r den Abstand vom Ursprung im $\mathbb{R}^3$ bedeutet.

- (a) Rechnen Sie nach, dass auf der linken Seite von (1) der Laplaceoperator steht.
 - (b) Welche Gleichung erfüllt dann die Hilfsfunktion $v(t, r) := r u(t, r)$?
 - (c) Ermitteln Sie Lösungen für v mittels des Ansatzes $v(t, r) = f(kr - t)$ für eine unbekannte Funktion f einer Variablen und eine unbekannte Konstante k .
 - (d) Welche Lösungen ergeben sich daraus für $u(t, r)$?
2. Thermische Explosionen in einem Kessel. Ein als kugelförmig angenommener Kessel enthält ein chemisch reagierendes Gemisch der Konzentration $C(t, r)$ und Temperatur $T(t, r)$. Folgendes System beschreibt den Prozeß:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + qw(C, T), \quad 0 < r < L, t > 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{b}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial C}{\partial r} \right) - w(C, T), \quad 0 < r < L, t > 0 \quad (3)$$

$$w(C, T) = AC \exp(-E_a/(RT)) \quad (4)$$

$$T(0, r) = T_0, C(0, r) = C_0 \quad 0 < r < L \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial r}(t, 0) = 0, \quad t > 0 \quad (6)$$

$$T(t, L) = T_{amb}, \quad \frac{\partial C}{\partial r}(t, L) = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

mit Konstanten a, b, q, A, E_a, R .

- (a) Was für Gleichungen stellen (2) bis (7) dar? Klassifizieren Sie auftretende partielle Differentialgleichungen!
- (b) Welche Modellannahmen liegen diesem System zugrunde?

- (c) Was ist die Wirkung der sogenannten Reaktionsrate $w(C, T)$?
- (d) Vernachlässigt man die räumliche Ausdehnung, so kommt man zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Stellen Sie dieses auf! Wo liegt seine Schwierigkeit?
3. Wir betrachten die Temperatur $u = u(t, x)$ in einem dünnen, homogenen Stab der Länge L .
- (a) Schreiben Sie die Wärmeleitungsgleichung für diesen Fall auf.
- (b) Wir halten die Temperatur an beiden Enden jeweils konstant, d.h.

$$u(t, 0) = u_1, \quad u(t, L) = u_2 \quad (t \geq 0).$$

Nach langer Zeit stellt sich bei verschwindender Quelle eine stationäre Temperaturverteilung ein. Durch welche Gleichung wird diese beschrieben? Lösen Sie diese Gleichung und interpretieren Sie das Ergebnis!

- (c) Ermitteln Sie auch für die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2, \quad u(t, 0) = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = 0 \quad (t \geq 0)$$

bzw.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(t), \quad u(t, 0) = u_1, \quad u(t, L) = u_2, \quad (t \geq 0),$$

ob eine stationäre Temperaturverteilung existiert!

4. Betrachtet wird die Wärmeleitung in einem Kreisring mit innerem Radius R_1 und äußerem Radius R_2 .
- (a) Auf den beiden Randkreisen ist eine konstante Temperatur u_1 bzw. u_2 vorgegeben. Ermitteln Sie die stationäre Temperaturverteilung und vergleichen Sie das Ergebnis mit der letzten Aufgabe.
- (b) Für welche Werte von β hat das Problem mit den Nebenbedingungen

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(R_1, t) = \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(R_2, t) = 1$$

eine stationäre Lösung? Geben Sie sowohl eine physikalische wie eine mathematische Argumentation an! Welche Zusatzbedingung sollte die Funktion f erfüllen?