

Partielle Differentialgleichungen für Nichtmathematiker

3. Übung: Fouriersche Methode

Aufgabe 2 kann schriftlich bis 12. 1. 2026 abgegeben werden.

1. Wir betrachten die Laplacegleichung

$$\Delta u = 0$$

im Rechteck $[0, a] \times [0, b]$ unter den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(a, y) &= 0 & (0 \leq y \leq b), \\ u(x, 0) &= g(x) & (0 \leq x \leq a), \\ u_y(x, b) &= f(x) & (0 \leq x \leq a) \end{aligned}$$

mit gegebenen Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

- Klassifizieren Sie die Randbedingungen! Müssen Verträglichkeitsannahmen gemacht werden?
 - Führen Sie einen Separationsansatz durch und lösen Sie die entstehenden Randwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen.
 - Ermitteln Sie die Lösung der Laplacegleichung im Rechteck unter den angegebenen Randbedingungen!
2. Wir betrachten die Wärmeleitung durch eine Wand. Diese sei unendlich ausgedehnt, so daß wir die Temperatur $u(x, t)$ nur in Abhängigkeit von der Wandtiefe x ($0 \leq x \leq L$) betrachten können. Bei $x = 0$ sei innen, bei $x = L = 0.24\text{m}$ außen. Die Wärmeleitungsgleichung ist

$$u_{xx} = \frac{1}{K} u_t,$$

wobei die Wärmeleitfähigkeit $K = 5,27 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ für eine Ziegelmauer und $K = 4,69 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ für Gasbeton beträgt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ herrsche die konstante Temperatur u_0 , d.h.

$$u(x, 0) = u_0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t_1 = 4\text{h}$ heizen wir innen mit einem konstanten Wärmestrom Q . Somit lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \begin{cases} -\frac{Q}{D}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1, \end{cases} \\ u(L, t) &= u_0 \end{aligned}$$

Die Materialkonstante D beträgt $0,79 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ für Ziegel und $0,197 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ für Gasbeton.

- Erklären Sie, welche Modellannahme mit der Randbedingung an der Außenwand ($x = L$) getroffen wurde.
- Wir wollen das Anfangsrandwertproblem zunächst im Intervall $0 \leq t \leq t_1$ lösen. Finden Sie eine Funktion $u_1(x, t)$, die die Differentialgleichung und die Randbedingungen in diesem Zeitintervall erfüllt! (Hinweis: eine lineare Funktion in x , unabhängig von t ist geeignet.)
- Wir machen für das Anfangsrandwertproblem den Ansatz $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion u_2 . Welche Anfangs- und Randbedingungen muß u_2 erfüllen?
- Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem für u_2 (immer noch für $0 \leq t \leq t_1$) mit Hilfe der Fourierschen Methode und geben Sie dann die Lösung u des ursprünglichen Problems an!
- Um die Lösung für $t > t_1$ zu ermitteln, formulieren wir ein Anfangs-Randwert-Problem für u , wobei wir die Werte der schon ermittelten Lösung u zum Zeitpunkt t_1 als neue Anfangswerte nutzen.
- Das entstandene Problem läßt sich durch einen einfachen Ansatz auf ein Problem mit homogenen Randwerten überführen. Finden Sie diesen und lösen Sie das erhaltene Problem mit Hilfe der Fourierschen Methode!
- Wie lautet also die Lösung des Wärmeleitungsproblems für $t > t_1$?
- Visualisieren Sie $\frac{u - u_0}{Q}$, also die erzielte Temperaturänderung im Verhältnis zum erzeugenden Wärmestrom, indem Sie die ermittelten Reihen numerisch auswerten und mit Hilfe geeigneter Software Graphiken erzeugen. Dargestellt werden kann zum Beispiel der Temperaturverlauf an der Innenwand bei $x = 0$.