

Partielle Differentialgleichungen für Nichtmathematiker

3. Übung: Fouriersche Methode

2. Wir betrachten die Wärmeleitung durch eine Wand. Diese sei unendlich ausgedehnt, so daß wir die Temperatur $u(t, x)$ nur in Abhängigkeit von der Wandtiefe x ($0 \leq x \leq L$) betrachten können. Bei $x = 0$ sei innen, bei $x = L = 0.24\text{m}$ außen. Die Wärmeleitungsgleichung ist

$$u_{xx} = \frac{1}{K} u_t, \quad (1)$$

wobei die Wärmeleitfähigkeit $K = 5,27 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ für eine Ziegelmauer und $K = 4,69 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$ für Gasbeton beträgt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ herrsche die konstante Temperatur u_0 , d.h.

$$u(0, x) = u_0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2)$$

Vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t_1 = 4\text{h}$ heizen wir innen mit einem konstanten Wärmestrom Q . Somit lauten die Randbedingungen

$$u_x(t, 0) = \begin{cases} -\frac{Q}{D}, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1, \end{cases} \quad (3)$$

$$u(t, L) = u_0 \quad (4)$$

Die Materialkonstante D beträgt $0,79 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ für Ziegel und $0,197 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$ für Gasbeton.

- Erklären Sie, welche Modellannahme mit der Randbedingung (4) an der Außenwand ($x = L$) getroffen wurde.
- Wir wollen das Anfangsrandwertproblem zunächst im Intervall $0 \leq t \leq t_1$ lösen. Finden Sie eine Funktion $u_1(t, x)$, die die Differentialgleichung und die Randbedingungen in diesem Zeitintervall erfüllt! (Hinweis: eine lineare Funktion in x , unabhängig von t ist geeignet.)
- Wir machen für das Anfangsrandwertproblem den Ansatz $u(t, x) = u_1(t, x) + u_2(t, x)$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion u_2 . Welche Anfangs- und Randbedingungen muß u_2 erfüllen?
- Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem für u_2 (immer noch für $0 \leq t \leq t_1$) mit Hilfe der Fourierschen Methode und geben Sie dann die Lösung u des ursprünglichen Problems an!
- Um die Lösung für $t > t_1$ zu ermitteln, formulieren wir ein Anfangs-Randwert-Problem für u , wobei wir die Werte der schon ermittelten Lösung u zum Zeitpunkt t_1 als neue Anfangswerte nutzen.
- Das entstandene Problem läßt sich durch einen einfachen Ansatz auf ein Problem mit homogenen Randwerten überführen. Finden Sie diesen und lösen Sie das erhaltene Problem mit Hilfe der Fourierschen Methode!
- Wie lautet also die Lösung des Wärmeleitungsproblems für $t > t_1$?

- (h) Visualisieren Sie $\frac{u - u_0}{Q}$, also die erzielte Temperaturänderung im Verhältnis zum erzeugenden Wärmestrom, indem Sie die ermittelten Reihen numerisch auswerten und mit Hilfe geeigneter Software Graphiken erzeugen. Dargestellt werden kann zum Beispiel der Temperaturverlauf an der Innenwand bei $x = 0$.

Lösung:

- (a) Es wurde angenommen, dass sich die Außentemperatur nicht ändert, sondern konstant bei u_0 bleibt. (Dirichletsche Randbedingung, Randbedingung erster Art)
- (b) Wir machen den Ansatz $u_1(t, x) = ax + b$ für $t \in [0, t_1]$. Einsetzen in (3), (4) ergibt

$$-\frac{Q}{D} = \frac{\partial}{\partial x} u_1(t, 0) = a,$$

$$u_0 = u_1(t, L) = aL + b = -\frac{Q}{D}L + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{QL}{D} + u_0.$$

Also ist

$$u_1(t, x) = \frac{Q}{D}(L - x) + u_0. \quad (5)$$

Diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung (1), da

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(t, x) = 0 = \frac{1}{K} \frac{\partial}{\partial t} u_1(t, x).$$

- (c) Da u und u_1 für $t \in [0, t_1]$ dieselben Randbedingungen erfüllen, erfüllt $u_2 = u - u_1$ auf diesen Intervall homogene Randbedingungen,

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2(t, 0) = 0, \quad (6)$$

$$u_2(t, L) = 0. \quad (7)$$

Für $t = 0$ folgt

$$u_2(0, x) = u(0, x) - u_1(0, x) = u_0 - \frac{Q}{D}(L - x) - u_0 = \frac{Q}{D}(x - L). \quad (8)$$

- (d) Wir machen den Ansatz

$$u_2(t, x) = T(t)X(x).$$

Einsetzen in die partielle Differentialgleichung (1) ergibt

$$T(t)X''(x) = \frac{1}{K}T'(t)X(x)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{KT(t)} =: \lambda$$

Da in der letzten Gleichung jede Seite nur von einer der Variablen x bzw. t abhängt, müssen beide Seiten konstant sein und können daher gleich λ gesetzt werden. Wir erhalten die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$X'' - \lambda X = 0 \quad (9)$$

$$T' - \lambda KT = 0 \quad (10)$$

Wegen (6), (7) folgen die Randbedingungen

$$X'(0) = 0, \quad X(L) = 0, \quad (11)$$

unter denen wir (9) lösen. Mit dem Exponentialansatz $X(x) = e^{\mu x}$ erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$\mu^2 - \lambda = 0.$$

Folgende Fälle können auftreten:

- Falls $\lambda > 0$, lauten die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ und die allgemeine Lösung von (9) ist

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}.$$

Wegen

$$X'(x) = C_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - C_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

ergeben die Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 = X'(0) &= C_1 \sqrt{\lambda} - C_2 \sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2, \\ 0 = X(L) &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}L} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}L} = C_1 \left(e^{\sqrt{\lambda}L} + e^{-\sqrt{\lambda}L} \right), \end{aligned}$$

und damit $C_1 = C_2 = 0$. $X(x) \equiv 0$ ist die triviale Lösung und $\lambda > 0$ kein Eigenwert.

- Falls $\lambda = 0$, hat die charakteristische Gleichung nur die Lösung $\mu = 0$ und die allgemeine Lösung von (9) ist

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Die Randbedingungen ergeben

$$\begin{aligned} 0 = X'(0) &= C_2 \\ 0 = X(L) &= C_1 + C_2 L = C_1, \end{aligned}$$

also die triviale Lösung $X(x) \equiv 0$, so dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist.

- Falls $\lambda < 0$, lauten die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\mu_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ und die allgemeine Lösung von (9) ist

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Wegen

$$X'(x) = -C_1 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

ergeben die Randbedingungen

$$\begin{aligned} 0 = X'(0) &= C_2 \sqrt{-\lambda} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0, \\ 0 = X(L) &= C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}L) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}L) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}L). \end{aligned}$$

Somit gibt es nichttriviale Lösungen der Randwertaufgabe falls $\cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0$, d.h.

$$\sqrt{-\lambda}L = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

sind die Eigenwerte und

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right)$$

die zugehörigen Eigenfunktionen.

Eingesetzt in (10) folgt

$$T' = -\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} K T,$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung, die wir durch Trennung der Veränderlichen lösen:

$$\begin{aligned}\int \frac{dT}{T} &= -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K}{4L^2} \int dt \\ \ln |T| &= -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K}{4L^2} t + C \\ T_n(t) &= C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K}{4L^2} t}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Produktlösungen

$$u_{2,n}(t, x) = C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K}{4L^2} t} \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right).$$

Wir bilden nun die Superposition

$$u_2(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K}{4L^2} t} \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right)$$

und müssen die C_n so anpassen, dass u_2 die Anfangsbedingung (8) erfüllt. Wegen

$$u_2(0, x) = \frac{Q}{D}(x - L) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n X_n(x). \quad (12)$$

Die Eigenfunktionen $X_n(x)$ sind orthogonal (aber nicht orthonormal), deshalb rechnen wir

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{(Q(x-L)/D, X_n)}{(X_n, X_n)} \\ (X_n, X_n) &= \int_0^L \cos^2\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) dx = \frac{L}{2} \\ (Q(x-L)/D, X_n) &= \frac{Q}{D} \int_0^L (x-L) \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) dx \\ &= \frac{Q}{D} \left((x-L) \frac{2L}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) \Big|_0^L \right. \\ &\quad \left. - \int_0^L \frac{2L}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) dx \right) \\ &= \frac{4QL^2}{D(2n+1)^2 \pi^2} \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right) \Big|_0^L \\ &= -\frac{4QL^2}{D(2n+1)^2 \pi^2} \\ C_n &= -\frac{8QL}{D(2n+1)^2 \pi^2}\end{aligned}$$

Für $t \in [0, t_1]$ erhalten wir damit die Lösung

$$\begin{aligned}u(t, x) &= u_1(t, x) + u_2(t, x) \\ &= \frac{Q}{D}(L - x) + u_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8QL}{D(2n+1)^2 \pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 K}{4L^2} t} \cos\left(\frac{2n+1}{2L} \pi x\right)\end{aligned}$$

(e) Für $t \geq t_1$ lösen wir die partielle Differentialgleichung (1) unter den Randbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = u_0$$

und der Anfangsbedingung

$$u(t_1, x) = \frac{Q}{D}(L - x) + u_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right).$$

(f) Wir setzen für $t \geq t_1$

$$u(t, x) = u_0 + u_3(t, x).$$

Dann erfüllt u_3 ebenfalls die partielle Differentialgleichung (1), die homogenen Randbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x} u_3(t, 0) = 0, \quad u_3(t, L) = 0$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u_3(t_1, x) = \frac{Q}{D}(L - x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right). \quad (13)$$

Durch den Ansatz $u_3(t, x) = T(t)X(x)$ wird man wieder auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen (9), (10) und die Randbedingungen (11) geführt. Dies ergibt wie oben die Lösung

$$u_3(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right),$$

wobei die Konstanten D_n nun so angepasst werden müssen, dass die Anfangsbedingung (13) erfüllt wird. Wir gelangen also zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) &= \frac{Q}{D}(L - x) \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Entwicklung (12) eingesetzt wurde. Koeffizientenvergleich liefert

$$D_n e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} = \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} - \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1}$$

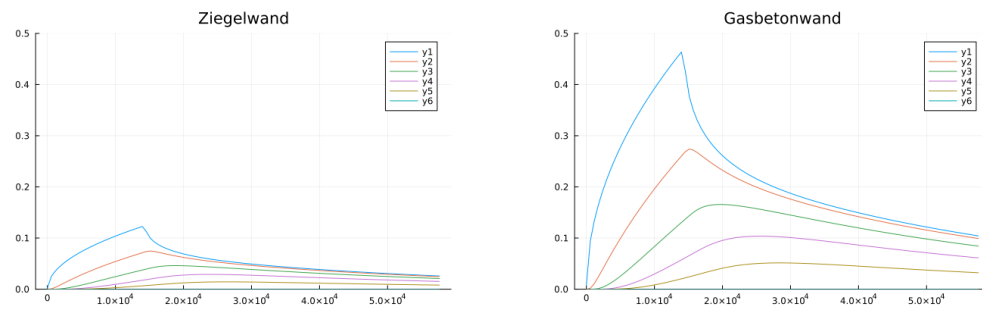
und damit

$$D_n = \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} \left(e^{\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} - 1 \right).$$

(g) Damit lautet die Lösung für $t \geq t_1$

$$u(t, x) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8QL}{D(2n+1)^2\pi^2} \left(e^{\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t_1} - 1 \right) e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 K}{4L^2} t} \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right).$$

(h) Die folgenden Bilder wurden mit der Programmiersprache Julia erzeugt (frei verfügbar unter <https://julialang.org/>). Der Quellcode ist als `waermeleitung.jl` auf OPAL erhältlich.



Dargestellt wird der zeitliche Verlauf der Temperatur an verschiedenen Orten. Die oberste Kurve y_1 entspricht dabei der linken Seite $x = 0$ der Wand, die folgenden Kurven entsprechen regelmäßig verteilten Orten im Inneren der Wand. Man erkennt jeweils einen Temperaturanstieg durch Heizen, dann einen Temperaturabfall. Die Maximaltemperatur wird umso später erreicht, je tiefer man in der Wand ist. Außerdem werden die Temperaturverläufe mit zunehmender Wandtiefe immer flacher und die Ziegelwand dämmt besser als die Gasbetonwand.