

Partielle Differentialgleichungen für Nichtmathematiker

4. Übung: Fouriertransformation

1. Bestimmen Sie die Fouriertransformierten $F(f)$ folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$

(c) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$

2. Weisen Sie folgende Rechenregeln für die Fouriertransformation nach:

(a) $F(f(x - x_0))(\xi) = e^{-ix_0\xi} F(f)(\xi),$

(b) $F(f(\alpha x))(\xi) = \frac{1}{\alpha} F(f)\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0,$

(c) $F(e^{i\xi_0 x} f(x))(\xi) = F(f)(\xi - \xi_0).$

3. Lösen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die folgenden Differentialgleichungen. Die Ausführbarkeit aller Rechenschritte (Transformierbarkeit von f , usw.) sei jeweils angenommen.

- (a) das Cauchy-Problem

$$u_t = (1 + t^2)u_{xx}, \quad u(0, x) = f(x), \quad \text{für } t \geq 0, -\infty < x < \infty,$$

- (b) die Diffusionsgleichung mit Konvektionsterm

$$u_t = ku_{xx} + cu_x \quad \text{für } t \geq 0, -\infty < x < \infty$$

unter der Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ wobei c, k positive Konstanten sind.

4. Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 4. \end{cases}$$

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Definition der Fouriertransformierten einer Funktion die Fouriertransformierte $F(g)(\xi)$ von g .
- b) Lösen Sie mit Hilfe der Methode der Fouriertransformation das Cauchy-Problem

$$u_t = u_{xxxx}, \quad u(0, x) = g(x), \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$