

Partielle Differentialgleichungen für Nichtmathematiker

5. Übung: Laplacetransformation

1. Man berechne die Laplacetransformierten folgender Funktionen, wobei stets $a > 0$ sei:

(a) $f(t) = t \cos at,$

(b) $f(t) = t^2 \sin at,$

(c) $f(t) = \sin^2 at.$

2. Berechnen Sie die inversen Laplacetransformierten folgender Funktionen:

(a) $F(s) = \frac{1}{2(s-1)},$

(b) $F(s) = \frac{s+1}{s^2(s-1)}.$

3. Eine halbunendliche Saite wird am Ort $x = 0$ fest eingespannt und befinde sich zur Zeit $t = 0$ unausgelenkt und in Ruhe. Wird sie durch eine zeitlich veränderliche äußere Kraft bewegt, so gelten für die Auslenkung $u(t, x)$ zur Zeit t am Ort x die Gleichungen

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(t) \quad x, t > 0$$

$$u(0, x) = 0$$

$$u_t(0, x) = 0$$

$$u(t, 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u(t, x)| < \infty.$$

Man löse diese partielle Differentialgleichung mittels Laplacetransformation bezüglich t , die Ausführbarkeit aller Rechenschritte (Transformierbarkeit usw.) sei angenommen.

4. Lösen Sie die Gleichung der halbunendlichen Saite ohne äußere Kraft, die an einem Ende bewegt wird:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad x, t > 0$$

$$\begin{aligned}
u(0, x) &= 0 \\
u_t(0, x) &= 0 \\
u(t, 0) &= f(t) \\
\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) &= 0.
\end{aligned}$$