

Vorlesung Metallische Funktionswerkstoffe SS 2026



Leibniz Institute
for Solid State and
Materials Research
Dresden



Supraleitung II

Dr. Ruben Hühne

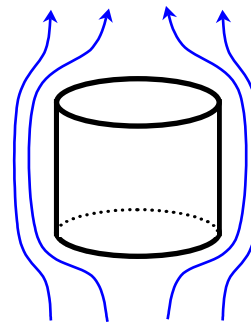
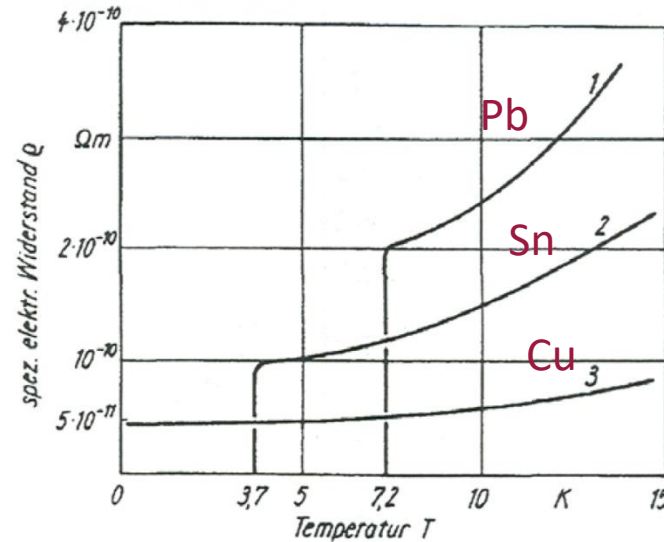
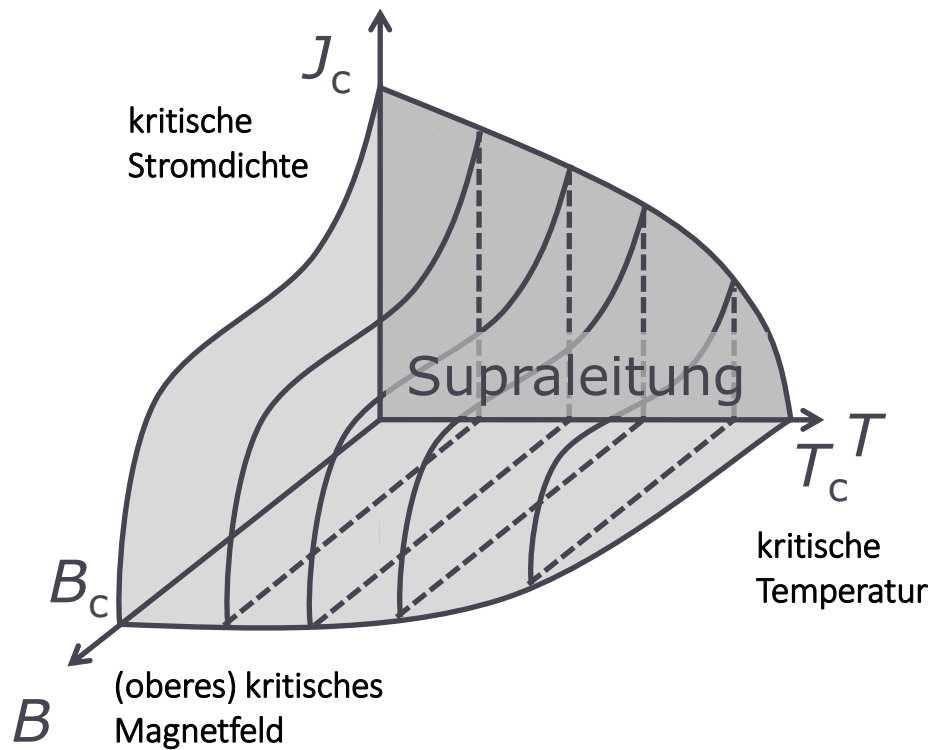
*Arbeitsgruppe Funktionale Oxidschichten und Supraleiter
Institut für Metallische Werkstoffe
IFW Dresden, Helmholtzstrasse 20, D-01069 Dresden, Germany
Mail: r.huehne@ifw-dresden.de*

Inhalt

- Entdeckung der Supraleitung
- Grundlegende supraleitende Effekte
- Phänomenologische Beschreibung
- Mikroskopische Beschreibung der Supraleitung
- Kritische Stromdichte und Pinning
- Konventionelle Supraleiter
- Ausgewählte unkonventionelle Supraleiter
 - Hochtemperatursupraleitung: Kuprate
 - Fe-basierte Supraleiter

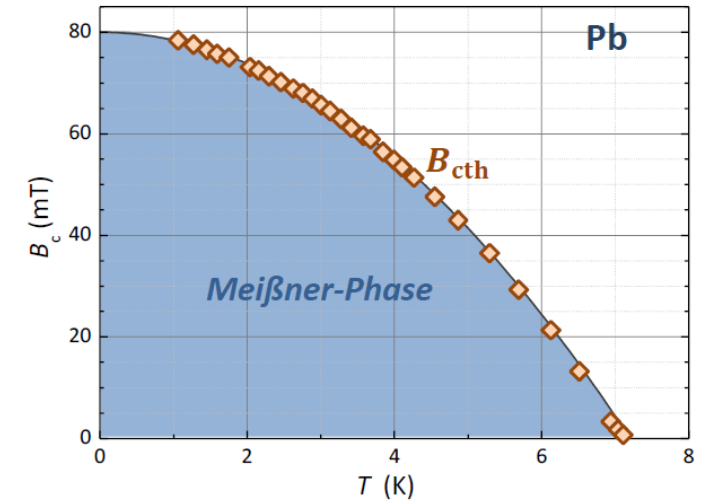
Grundlegende supraleitende Effekte

Supraleitendes Phasengebiet

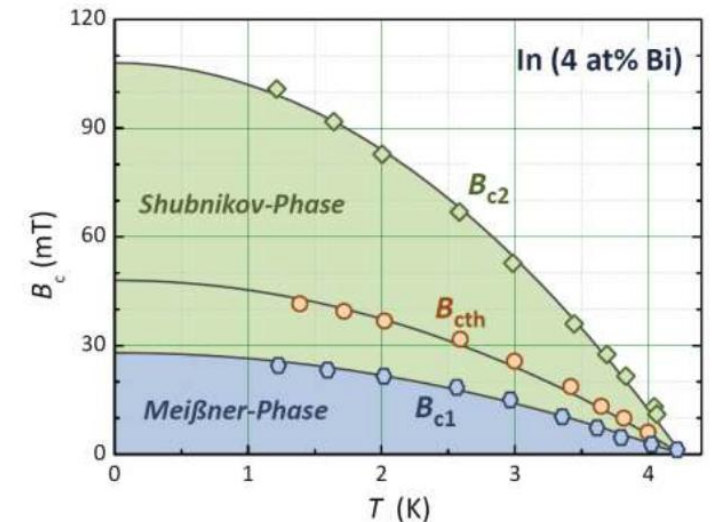


Meissner-Ochsenfeld Effekt

Typ-I Supraleiter



Typ-II Supraleiter



Phänomenologische Beschreibung

Makroskopische Beschreibung der supraleitenden Effekte (London-Theorie)

Ideale Leitfähigkeit

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{E}$$

1. London-Gleichung

Meissner-Ochsenfeld-Effekt

$$\frac{m_s}{n_s q_s^2} \operatorname{rot} \mathbf{j} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

2. London-Gleichung

Eindringen des Magnetfeldes an Grenzfläche

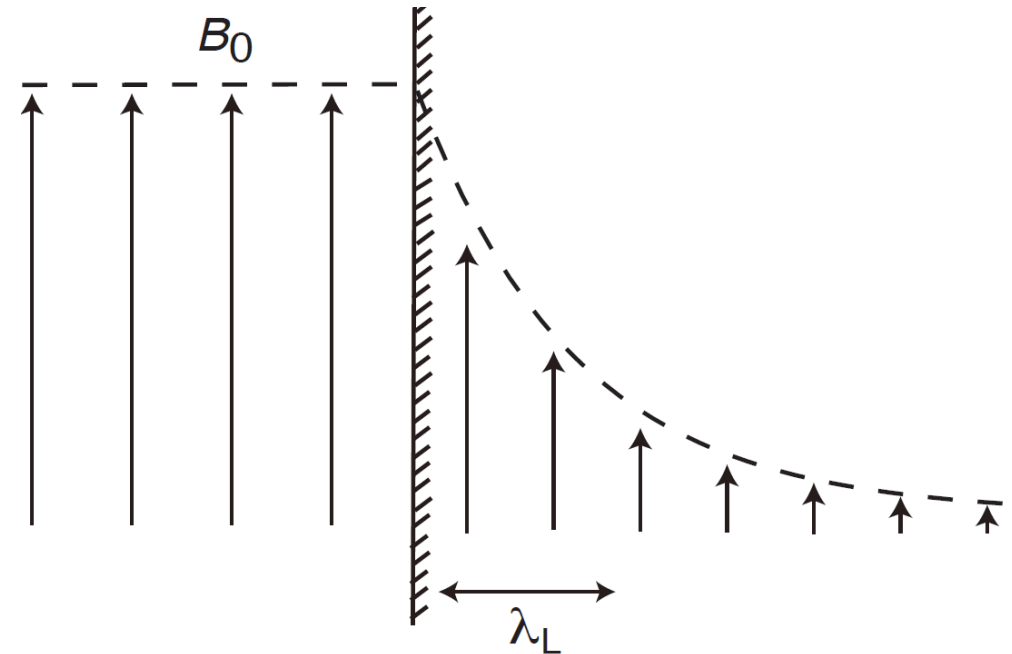
$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 n_s q_s^2}{m_s} \mathbf{B}$$

Lösung nur mit exponentiell abfallendem Feld

$$B_z(x) = B_{0,z} e^{-(x/\lambda_L)}$$

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

Londonsche
Eindringtiefe



Grundlegende supraleitende Effekte

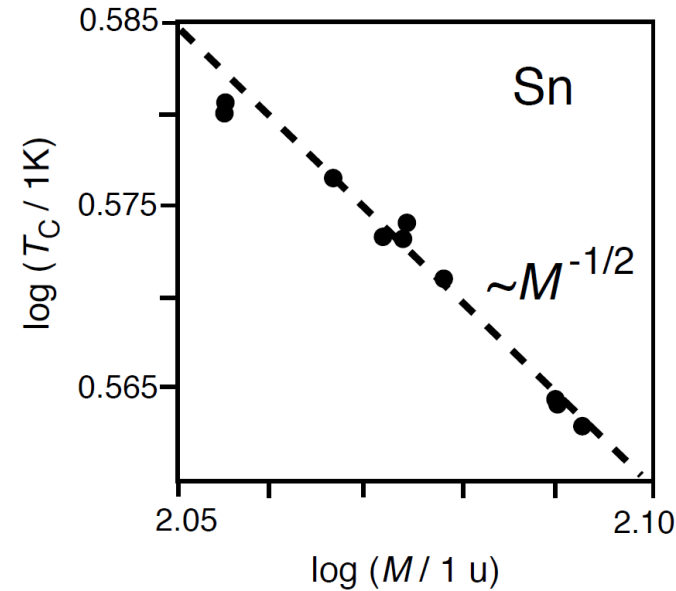
Isotopeneffekt

Skalierung von T_c in Abhängigkeit von der Ionenmasse M

$$T_c \propto M^{-1/2}$$

Elektronische Struktur ist unabhängig von Ionenmasse, aber Gitterschwingungen:

$$\omega = (\gamma/M)^{1/2}$$



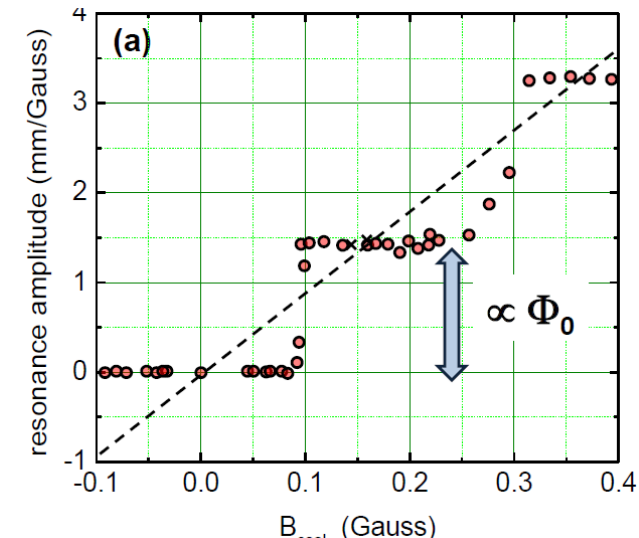
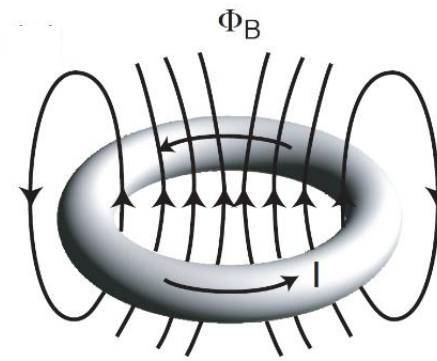
Flussquantifizierung

Magnetische Fluss durch einen supraleitenden Ring

$$\Phi_B = -n \frac{h}{q_s}$$

Flussquant:

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.0678 \times 10^{-15} \text{ Vs}$$



Phänomenologische Beschreibung

Ginzburg-Landau Theorie

erweiterte London Theorie: anwendbar für $n_s = \text{const}$

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\Phi(\mathbf{r})}$$

makroskopische Wellenfunktion für Beschreibung des supraleitenden Grundzustands

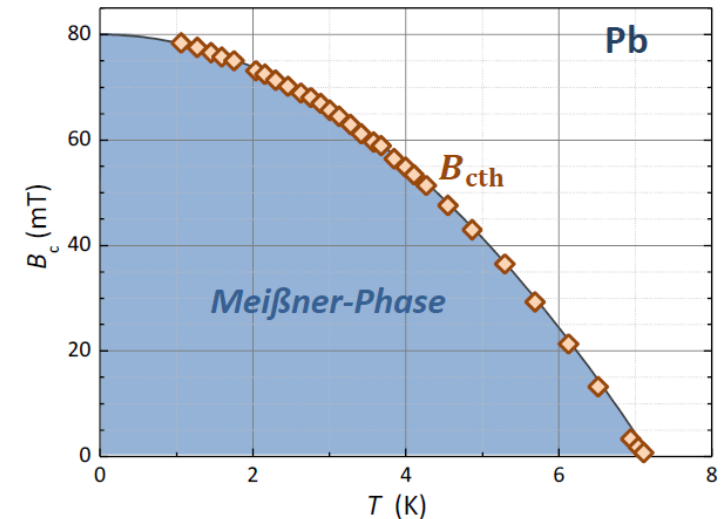
V. Ginzburg und L. Landau: Erweiterung auf komplexe, örtlich variierende Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r})$

$$n_s(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$$

Basiert auf der Landau-Theorie zur Beschreibung eines Phasenüberganges 2. Ordnung

Ansatz für freie Enthalpiedichte in der Nähe von T_c

$$g_s = g_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4$$



Phänomenologische Beschreibung

Ginzburg-Landau Theorie

erweiterte London Theorie: anwendbar für $n_s = \text{const}$

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\Phi(\mathbf{r})}$$

makroskopische Wellenfunktion für Beschreibung des supraleitenden Grundzustands

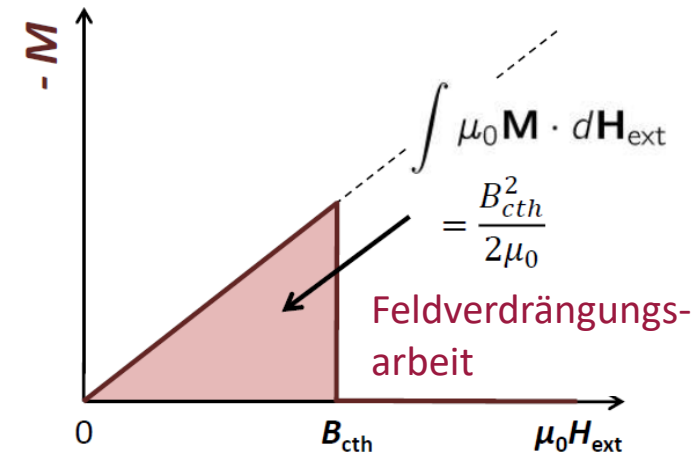
V. Ginzburg und L. Landau: Erweiterung auf komplexe, örtlich variierende Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r})$

$$n_s(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$$

Basiert auf der Landau-Theorie zur Beschreibung eines Phasenüberganges 2. Ordnung

Ansatz für freie Enthalpiedichte **in der Nähe von T_c**

$$g_s = g_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4$$



$$\frac{B_{\text{cth}}^2(T)}{2\mu_0} = g_n(T) - g_s(T)$$

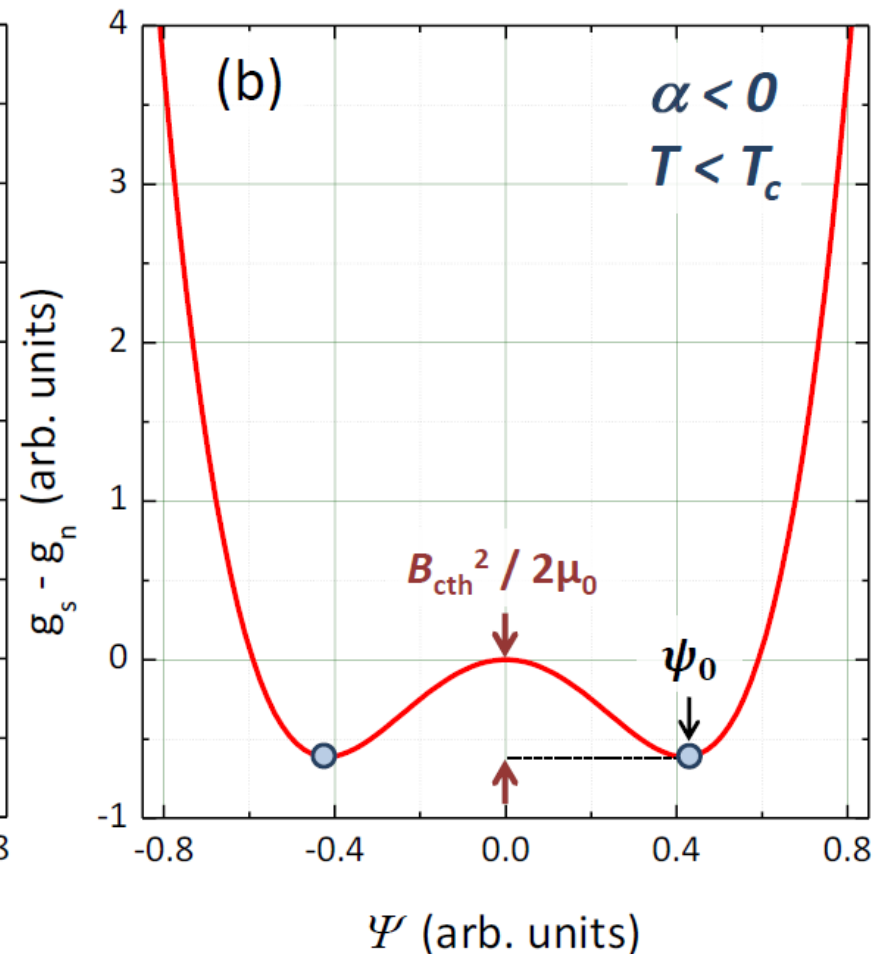
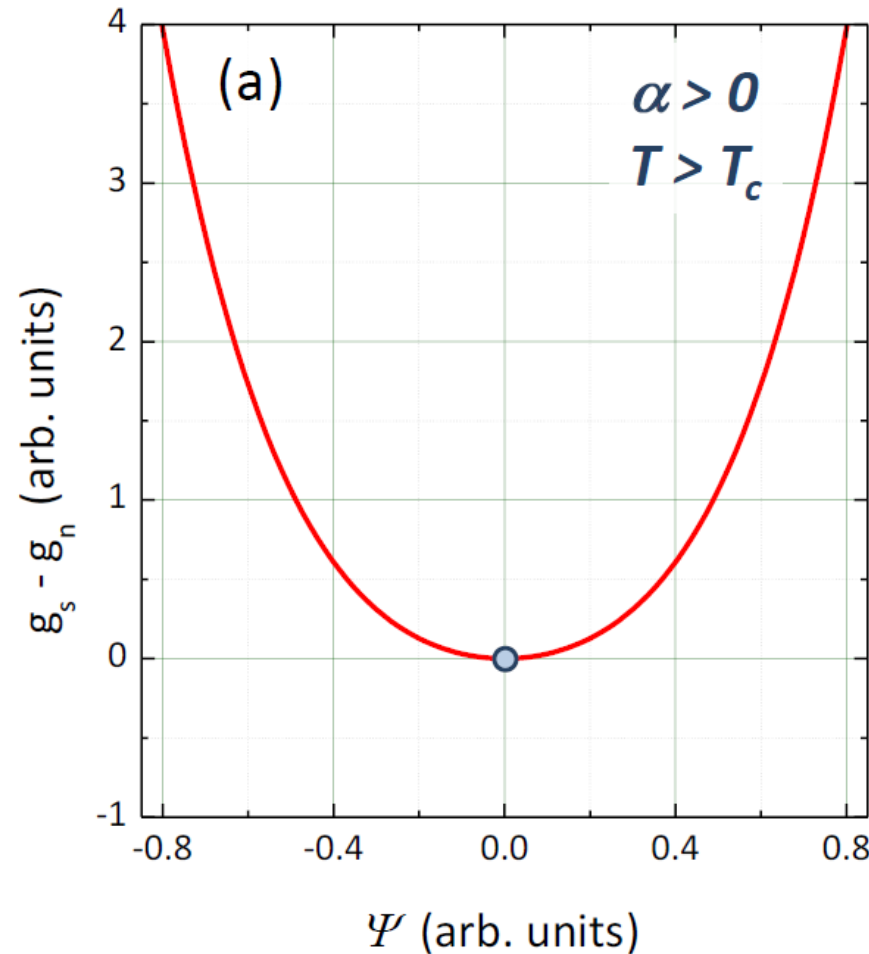
Phänomenologische Beschreibung

Ginzburg-Landau Theorie

$$g_s - g_n = \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4$$



$$g_s(T) - g_n(T) = -\frac{B_{cth}^2(T)}{2\mu_0}$$



Phänomenologische Beschreibung

Charakteristische Längenskalen

Ginzburg-Landau Eindringtiefe

$$\lambda_{GL}(T) = \frac{\lambda_{GL}(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)}}$$

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)^4}}$$

$$g_s = g_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4$$

$$\lambda_{GL}(0) = \sqrt{\frac{m_s \beta}{\mu_0 \bar{\alpha} q_s^2}}$$

$$\alpha(T) = \bar{\alpha} \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)$$

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 n_s q_s^2}}$$

Londonsche
Eindringtiefe

$$n_s(0) = \frac{\bar{\alpha}}{\beta}$$

Lokale Dichte der
supraleitenden Elektronen

$$n_s(T) = \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

Phänomenologische Beschreibung

Charakteristische Längenskalen

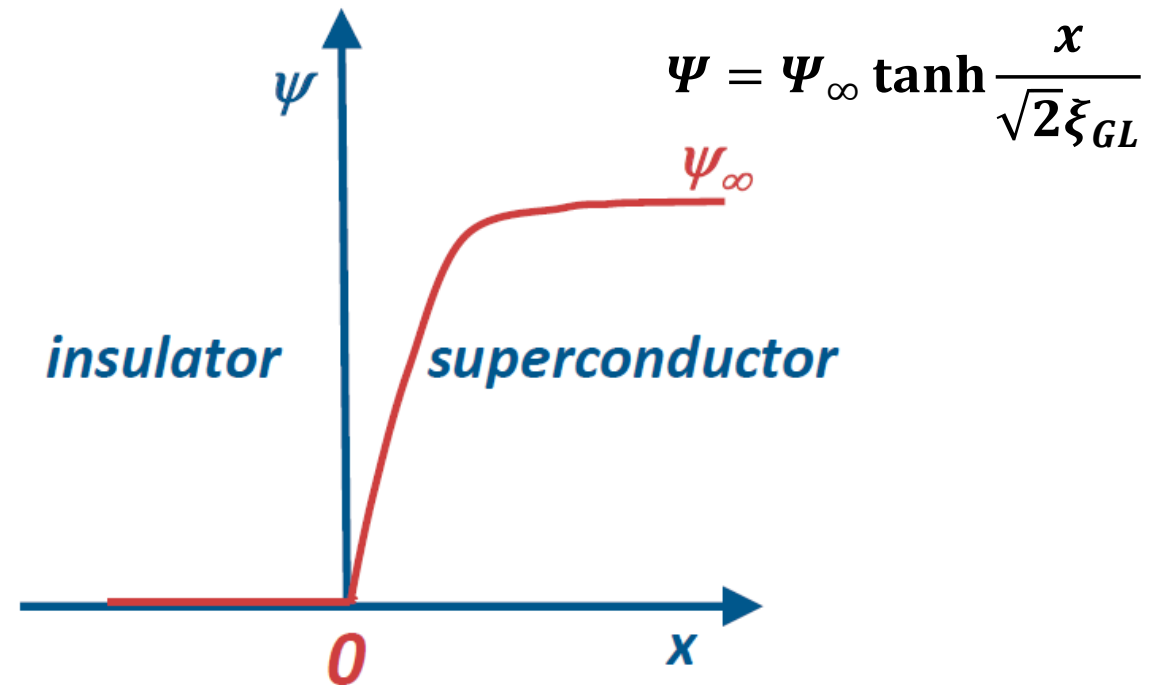
$$g_s = g_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4$$

Wellenfunktion an Grenzfläche bei $B = 0$

Ginzburg-Landau Kohärenzlänge

$$\xi_{GL}(T) = \frac{\xi_{GL}(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)}}$$

$$n_s(x) = |\psi(x)|^2$$



Phänomenologische Beschreibung

Charakteristische Längenskalen

Ginzburg-Landau Eindringtiefe

$$\lambda_{GL}(T) = \frac{\lambda_{GL}(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)}}$$

Ginzburg-Landau Kohärenzlänge

$$\xi_{GL}(T) = \frac{\xi_{GL}(0)}{\sqrt{1 - (T/T_c)}}$$

Ginzburg-Landau Parameter

$$\kappa = \frac{\lambda_{GL}}{\xi_{GL}} = \sqrt{\frac{2m_s^2\beta}{\mu_0\hbar^2q_s^2}}$$

$$\mathfrak{g}_s = \mathfrak{g}_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4$$

$$\lambda_{GL}(0) = \sqrt{\frac{m_s\beta}{\mu_0\bar{\alpha}q_s^2}}$$

$$\xi_{GL}(0) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m_s\bar{\alpha}}}$$

$$n_s(0) = \frac{\bar{\alpha}}{\beta}$$

Lokale Dichte der
supraleitenden Elektronen

$\alpha/2$ ~ gewonnenen Kondensations-
energie pro Cooperpaar

Phänomenologische Beschreibung

Grenzfläche Supraleiter-Normalleiter

Ginzburg-Landau Eindringtiefe λ_{GL}

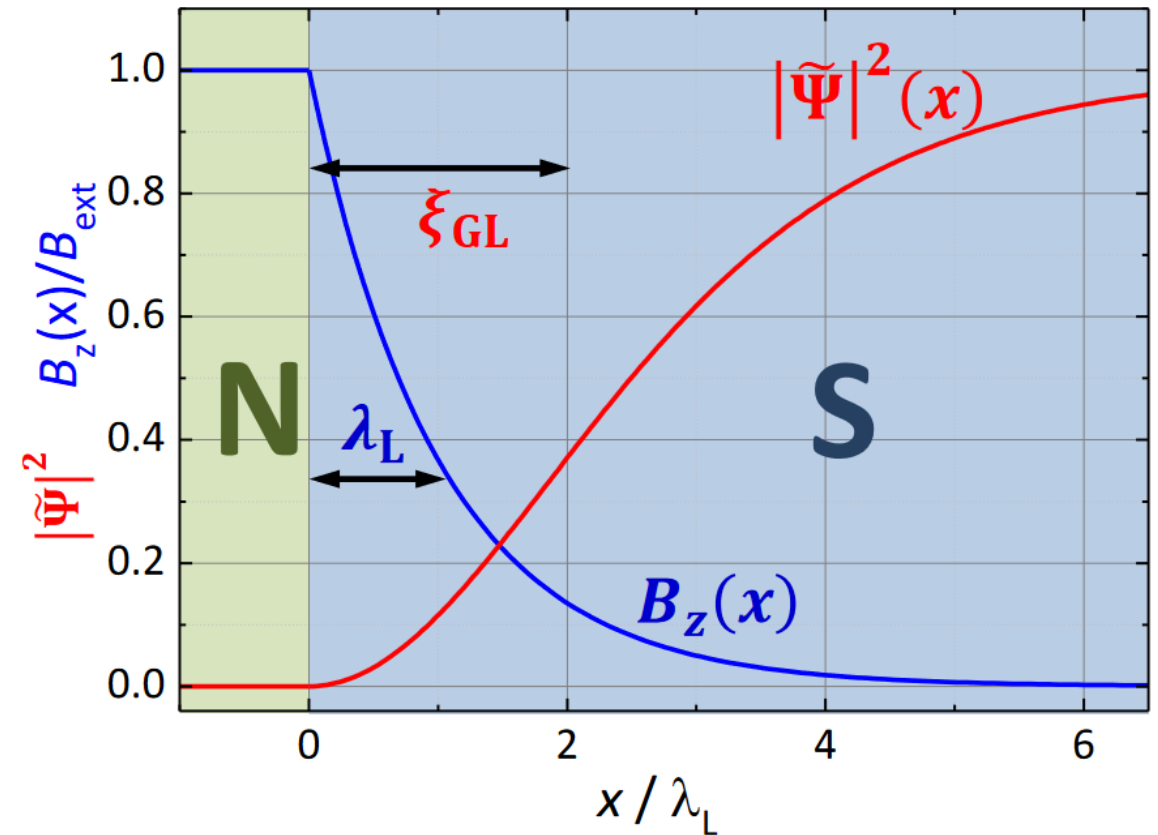
→ Maß für Eindringen des magnetischen Feldes

Ginzburg-Landau Kohärenzlänge ξ_{GL}

→ Maß über welche Länge die supraleitende Ladungsträgerdichte variieren kann

Thermodynamische kritisches Feld

$$B_{cth}(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi\sqrt{2}\xi_{GL}(T)\lambda_{GL}(T)}$$



Phänomenologische Beschreibung

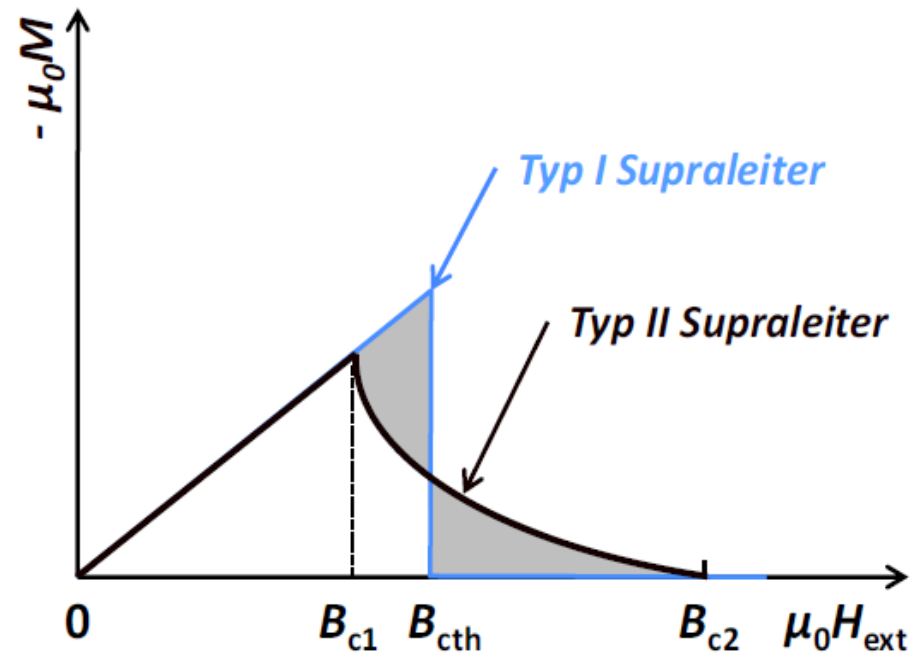
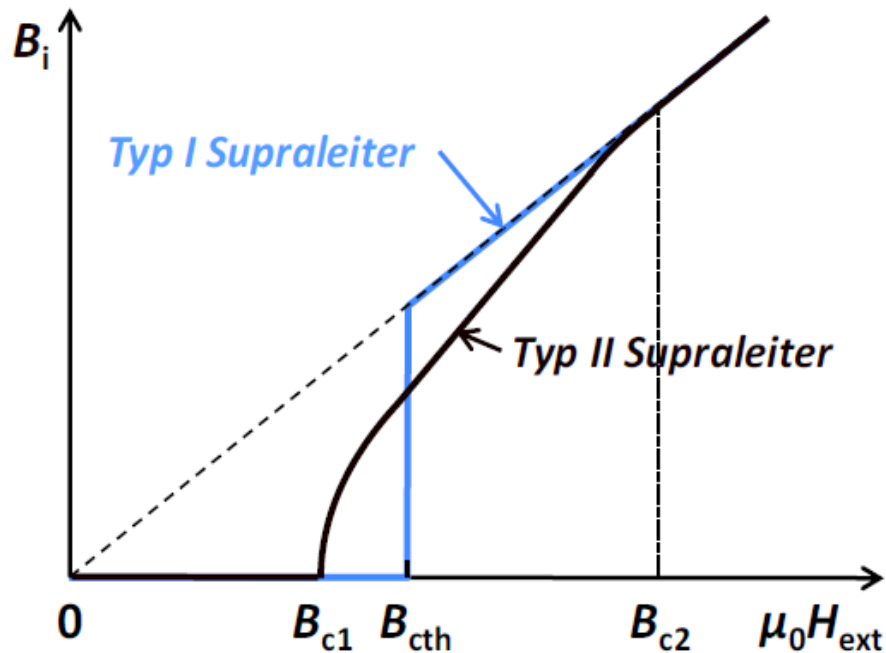
Thermodynamische Betrachtung

$$g_n(T) - g_s(T) = \frac{B_{cth}^2(T)}{2\mu_0} = \int_0^{B_{cth}} M dB_{ext} = \int_0^{B_{c2}} M dB_{ext}$$

Kondensationsenergie

SL Typ I

SL Typ II



Phänomenologische Beschreibung

Grenzfläche Supraleiter-Normalleiter

Reduzierte Feldverdrängungsenergie pro Fläche

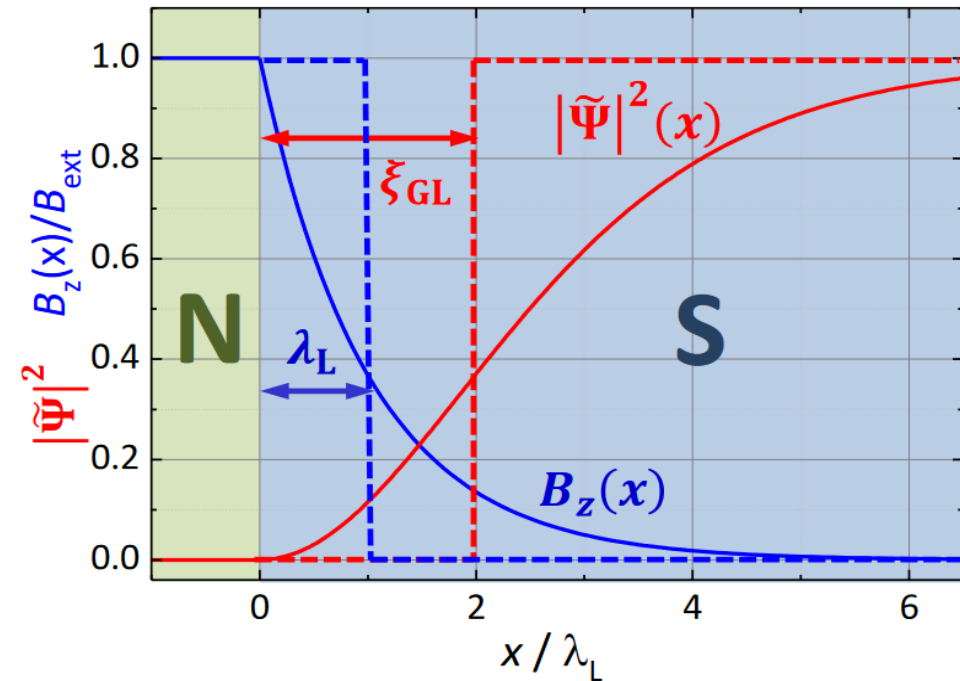
$$\Delta E_B \simeq \frac{B_{ext}^2}{2\mu_0} \lambda_L$$

Verlust an Kondensationsenergie pro Fläche

$$\Delta E_c \simeq \frac{B_{cth}^2}{2\mu_0} \xi_{GL}$$

Grenzflächenenergie:

$$\Delta E_{grenz} = \Delta E_c - \Delta E_B \simeq \frac{B_{cth}^2}{2\mu_0} \left\{ \xi_{GL} - \left(\frac{B_{ext}}{B_{cth}(T)} \right)^2 \lambda_L \right\}$$



Phänomenologische Beschreibung

Grenzfläche Supraleiter-Normalleiter

$$\Delta E_c - \Delta E_B \simeq \frac{B_{cth}^2}{2\mu_0} \left\{ \xi_{GL} - \left(\frac{B_{ext}}{B_{cth}(T)} \right)^2 \lambda_L \right\}$$

$$\lambda_L < \xi_{GL} \quad \text{Positiver Wert}$$

$$\lambda_L > \xi_{GL} \quad \text{Negativer Wert (d.h. Energiegewinn) möglich}$$

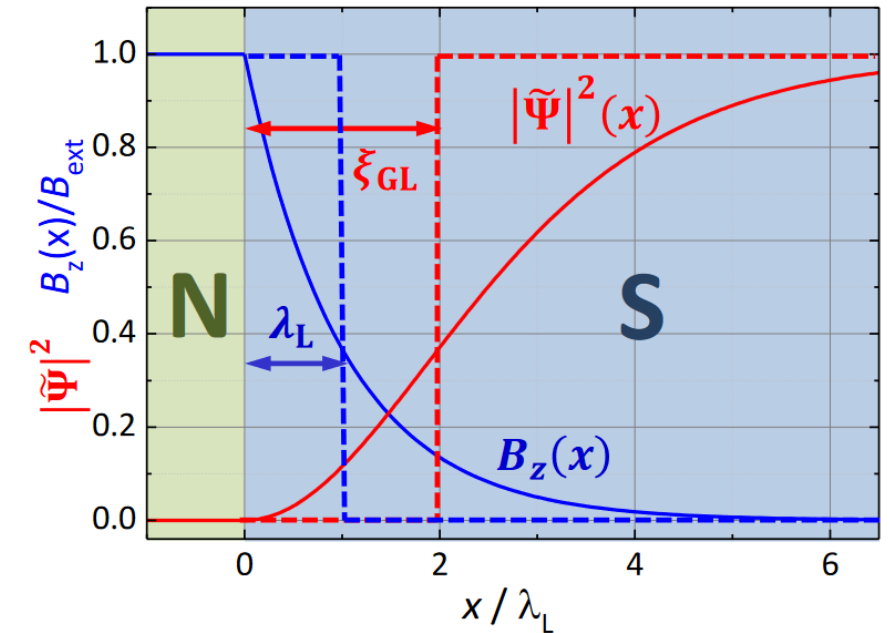
Übergang von Supraleiter Typ I zu Typ II:

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Typ I Supraleiter

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Typ II Supraleiter

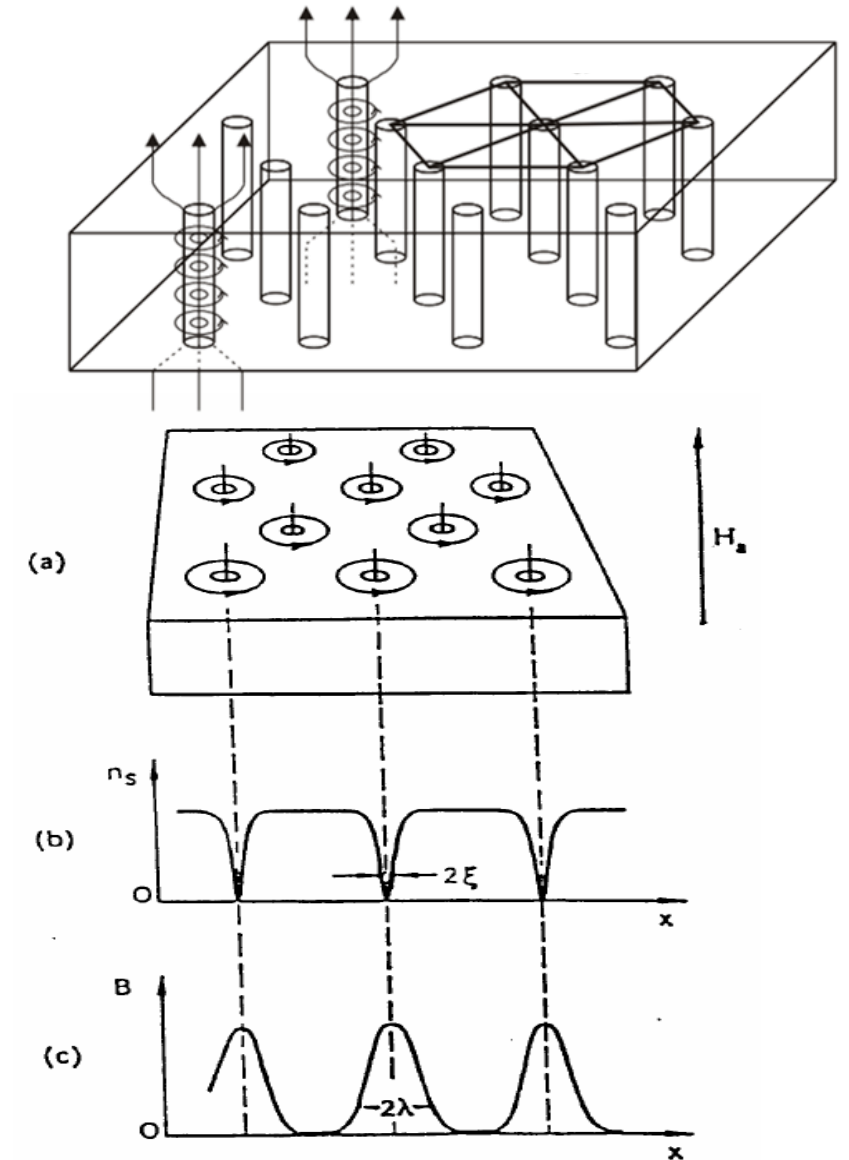
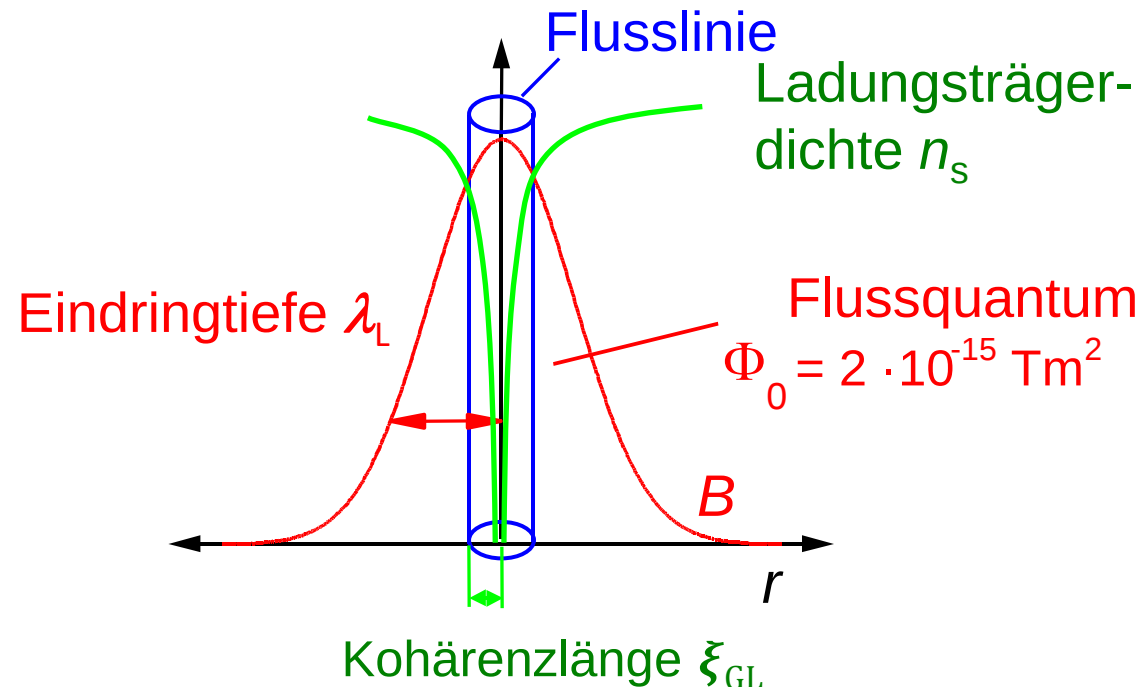


Phänomenologische Beschreibung

Shubnikov-Phase in Typ II Supraleitern

Oberhalb B_{c1} : Einbau von Grenzflächen energetisch günstiger

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$



Phänomenologische Beschreibung

B_{cth} and λ_L von supraleitenden Elementen

Element	Al	In	Nb	Pb	Sn	Ta	Tl	V
T_c [K]	1.19	3.408	9.25	7.196	3.722	4.47	2.38	5.46
B_{cth} [mT]	10.49	28.15	206	80.34	30.55	82.9	17.65	140
$\lambda_L(0)$ [nm]	50	65	32-45	40	50	35		40
κ_∞	0.03	0.06	~ 0.8	0.4	0.1	0.35	0.3	0.85

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}}$$

B_{c2} and λ_L von supraleitenden Verbindungen

Verbindung	NbTi	Nb ₃ Sn	NbN	PbIn (2-30%)	PbIn (2-50%)	Nb ₃ Ge	V ₃ Si	YBa ₂ Cu ₃ O ₇ (<i>ab</i> -Ebene)
T_c [K]	$\simeq 10$	$\simeq 18$	$\simeq 16$	$\simeq 7$	$\simeq 8.3$	23	16	92
B_{c2} [T]	$\simeq 10.5$	$\simeq 23-29$	$\simeq 15$	$\simeq 0.1-0.4$	$\simeq 0.1-0.2$	38	20	160 ± 25
$\lambda_L(0)$ [nm]	$\simeq 300$	$\simeq 80$	$\simeq 200$	$\simeq 150$	$\simeq 200$	90	60	$\simeq 140 \pm 10$
κ_∞	$\simeq 75$	$\simeq 20-25$	$\simeq 40$	$\simeq 5-15$	$\simeq 8-16$	30	20	$\simeq 100 \pm 20$

Phänomenologische Beschreibung

Grenzfläche Supraleiter-Normalleiter

Übergang von Supraleiter Typ I zu Typ II:

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Typ I Supraleiter

$$\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi_{GL}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

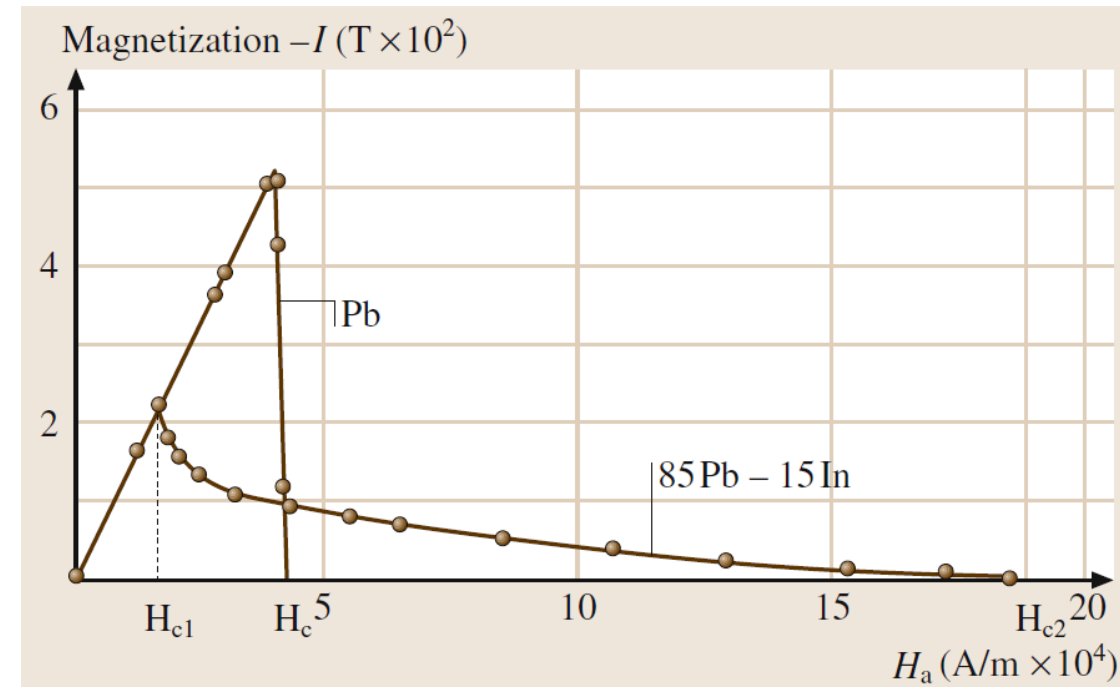
Typ II Supraleiter

Qualitativer Zusammenhang mit freier Weglänge der Elektronen l^* :

$$\lambda_L \sim 1/\sqrt{l^*}$$

$$\xi_{GL} \sim \sqrt{l^*}$$

$$\kappa \sim 1/l^*$$



Mit zunehmenden Verunreinigungen Übergang von Typ I zu Typ II Supraleitung

Phänomenologische Beschreibung

Kritische Felder

Oberes kritisches Feld

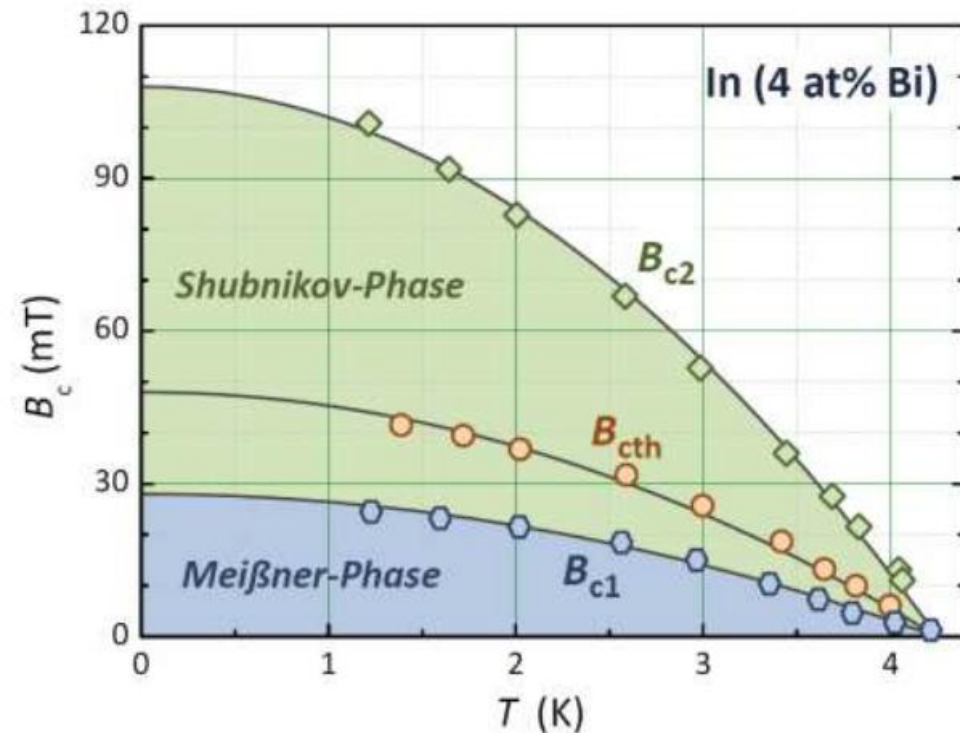
$$B_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{GL}^2}$$

Unteres kritisches Feld

$$B_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2} (\ln \kappa + 0.08)$$

→ Beziehungen können genutzt werden, um ξ_{GL} und λ_L zu bestimmen

Typ-II Supraleiter



Mikroskopische Beschreibung

BCS Theorie

Mikroskopische Beschreibung der Supraleitung (1957)



Kernelement ist attraktive Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen: Cooper-Paare

Skalierung von T_c in Abhängigkeit von der Ionenmasse M

$$T_c \propto M^{-1/2}$$

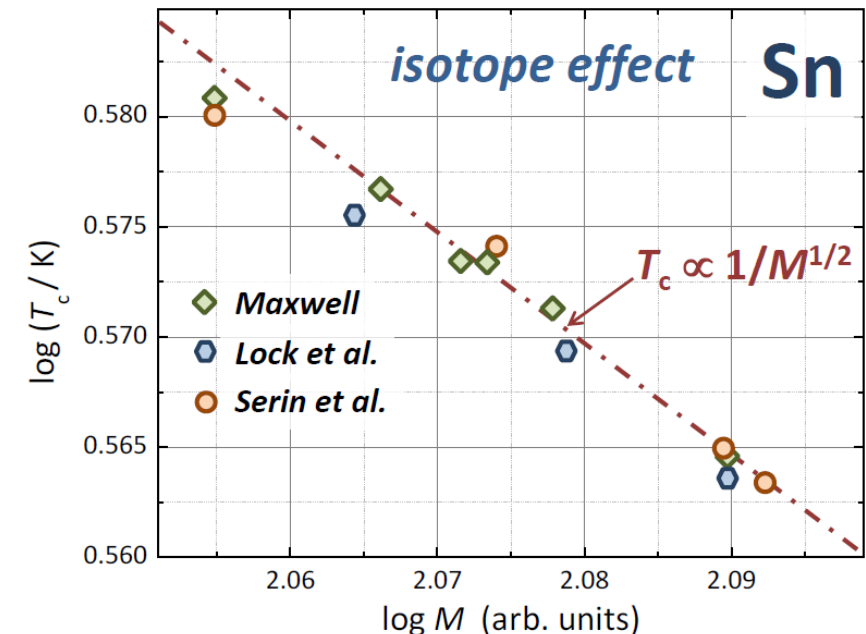
Elektronische Struktur ist unabhängig von Ionenmasse, aber Gitterschwingungen:

$$\omega = (\gamma/M)^{1/2}$$



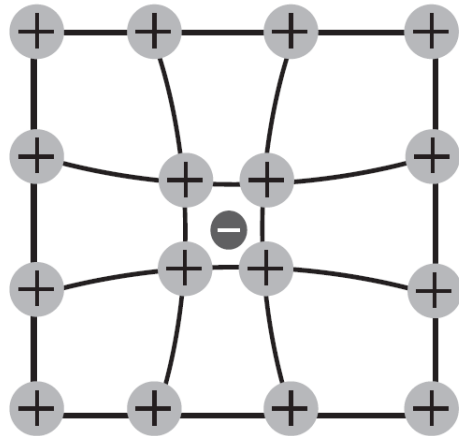
J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer

J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108 (1957) 1175



Mikroskopische Beschreibung

Wechselwirkung Elektron mit Kristallgitter



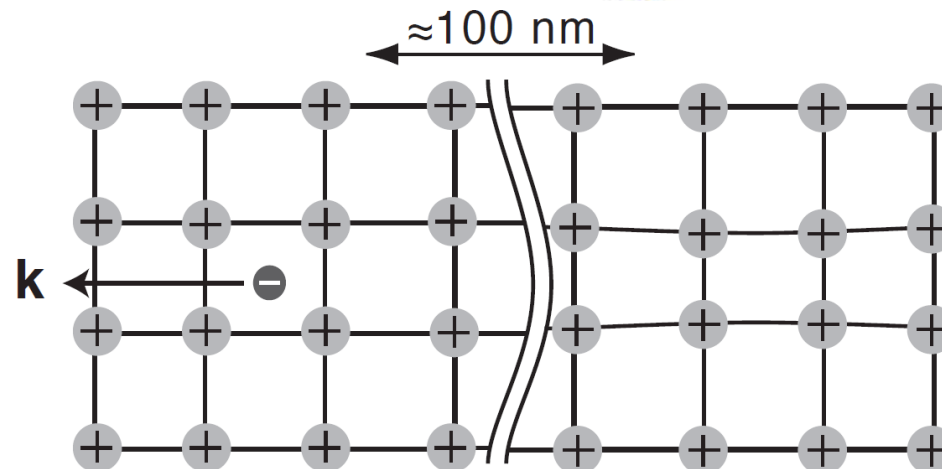
Elastische Verzerrung des Gitters (Phonon) durch Elektron führt zu Anziehung eines anderen Elektrons



Dynamisches Modell

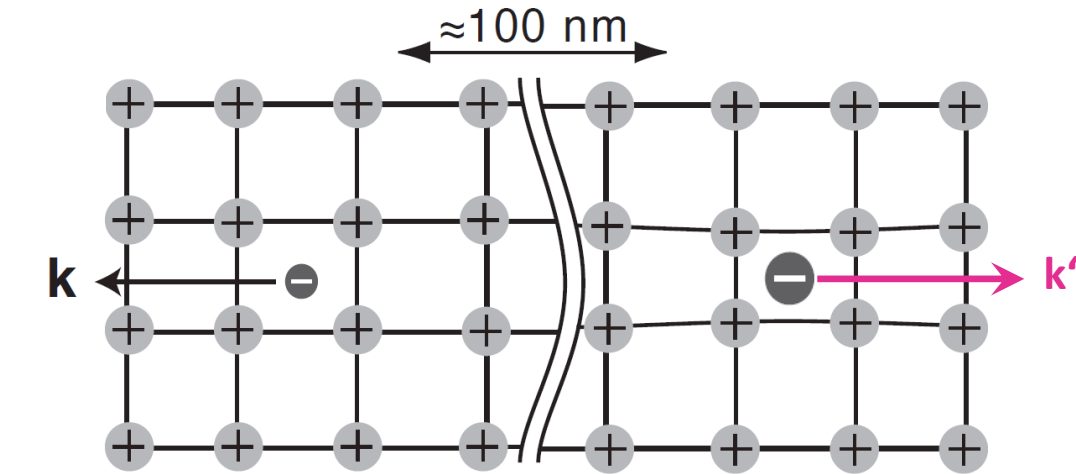
Spur einer positiven Ladungswolke hinter schnellem Elektron, relaxiert nur langsam mit:

$$\tau = 1/\omega_p$$



Mikroskopische Beschreibung

Wechselwirkung Elektron mit Kristallgitter



Relaxationszeit des Gitters:

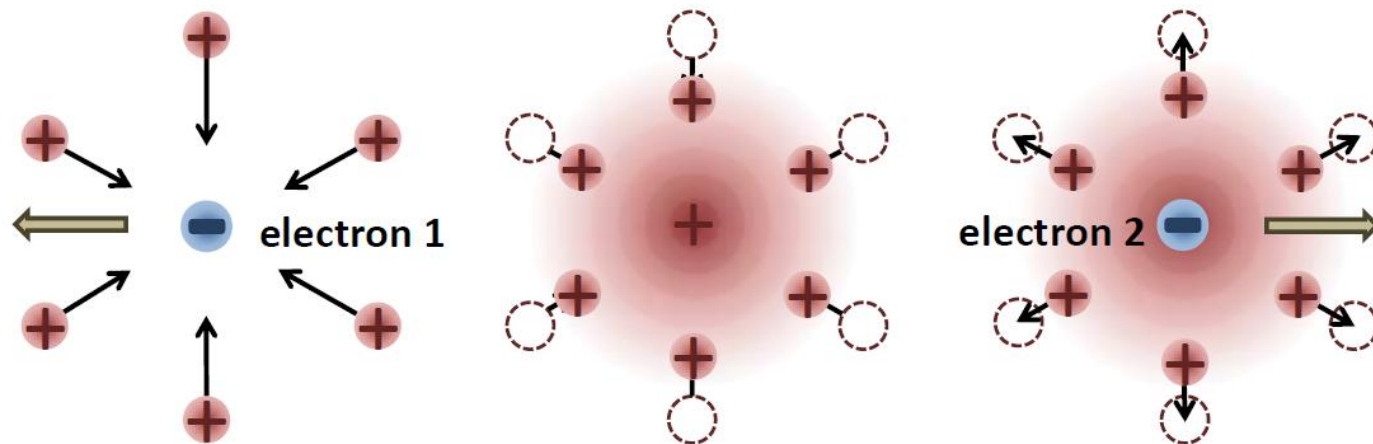
$$\tau = 1/\omega_p \quad \omega_p \simeq 10^{13} \text{ 1/s}$$

Geschwindigkeit der Elektronen:

$$v_F \simeq 10^6 \text{ m/s}$$

Wechselwirkungsbereich:

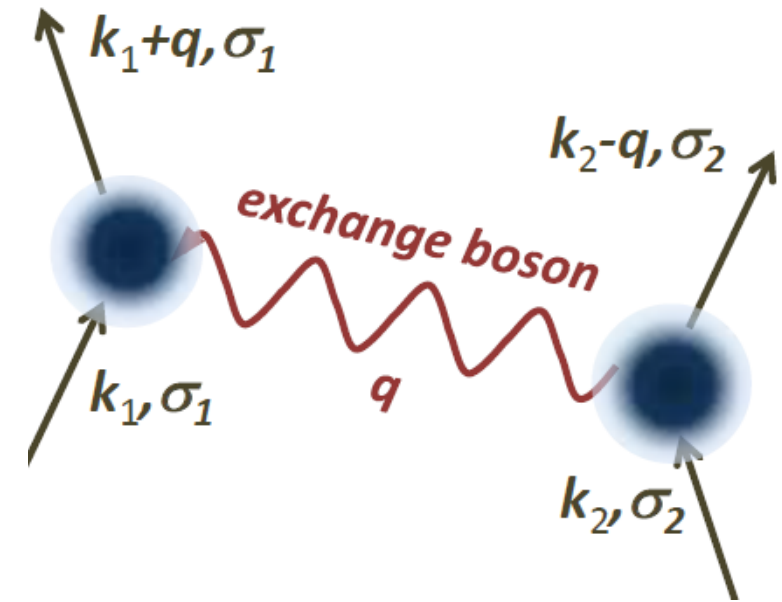
$$v_F \cdot \tau \simeq 100 \text{ nm} \triangleq \xi_0$$



Mikroskopische Beschreibung

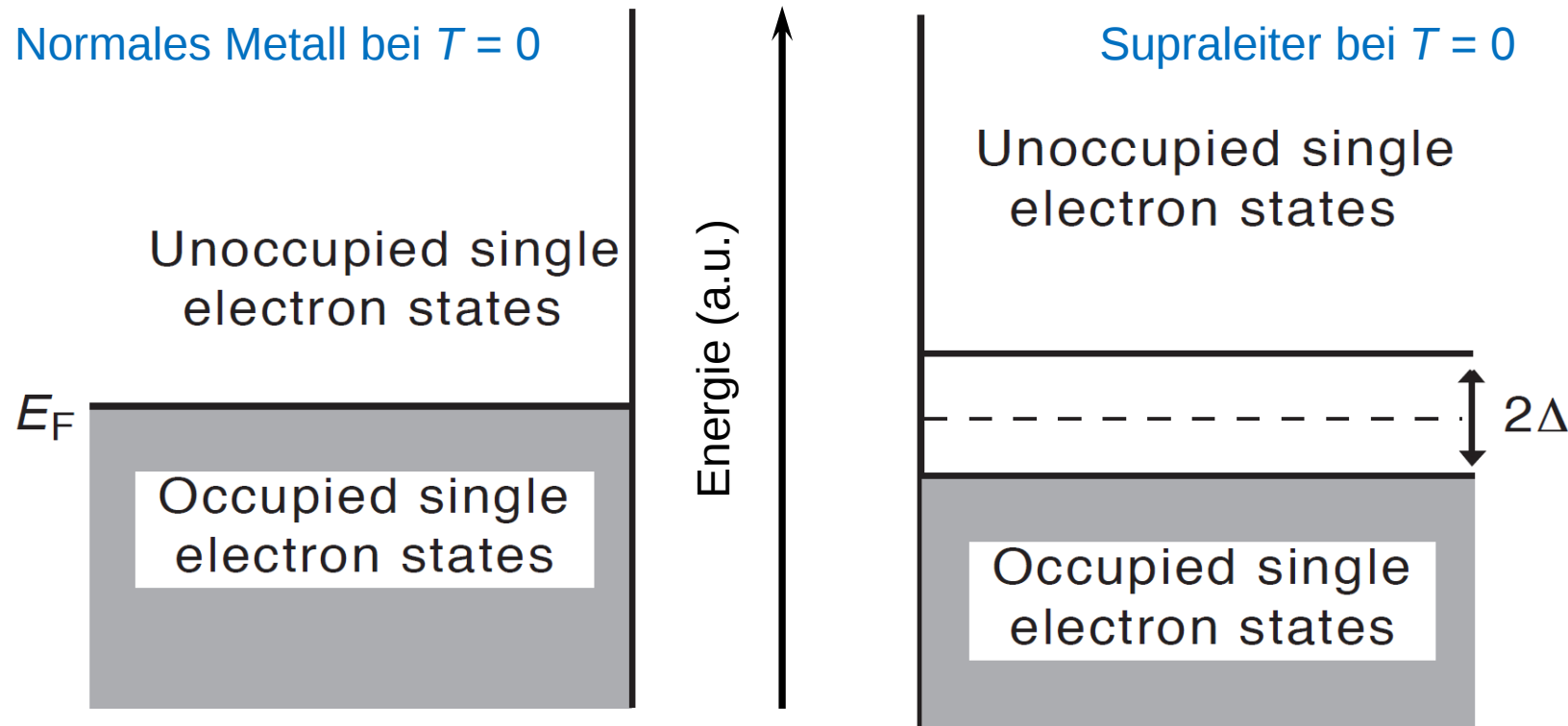
BCS Theorie

- Elektron-Phonon-Wechselwirkung maximal bei Elektronen mit **entgegengesetztem k-Vektor**
- Meist **Elektronen mit entgegengesetztem Spin** ($L=0$, $S=0$) → „Spin-Singlet“
- Cooper-Paare verhalten sich wie **Bosonen** → können in einen Grundzustand kondensieren (d.h. sehr viele Teilchen haben gleichen Zustand)
- Theoretische Beschreibung: Cooper-Paare sind „**Quasiteilchen**“ aus zwei Elektronen, die ein „virtuelles“ Phonon austauschen
- Nur Elektronen in der **Nähe der Fermikante** können diese virtuellen Phononen austauschen
- Beschreibung durch **Wechselwirkungspotential V** (in BCS-Theorie nicht zwingend Phononen!)



Mikroskopische Beschreibung

Bänderschema eines Supraleiters



- BCS-Grundzustand: Elektronen in Nähe des Fermi-Niveaus sind in Cooper-Paaren gebunden $\rightarrow$ Energiegewinn Δ pro Elektron
- Ausbildung einer Energielücke 2Δ an der Fermikante

Mikroskopische Beschreibung

BCS Grundzustand

Übergangstemperatur:

$$T_c = 1.13 \Theta_D \exp\left(-\frac{1}{g(E_F)V}\right)$$

$$\Theta_D \propto \omega_D \propto M^{-1/2} \quad \text{Isotopeneffekt}$$

V ... Wechselwirkungspotential

$g(E_F)$... Zustandsdichte der Cooperpaare
an der Fermienergie

Θ_D ... Debye-Temperatur

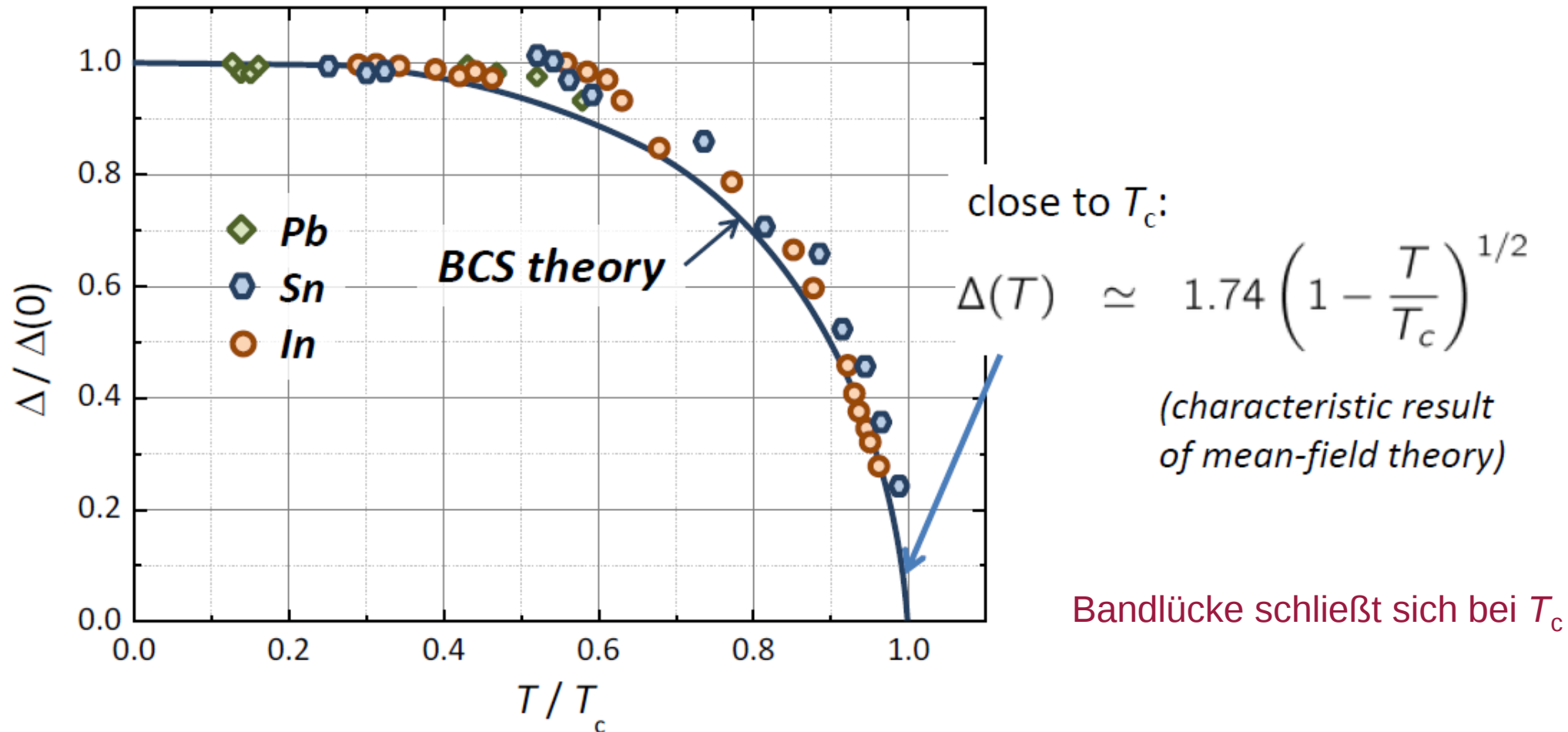
Zusammenhang zwischen Energielücke und T_c :

$$2\Delta(T=0) = 3.53 k_B T_c$$

	T_c (K)	$2\Delta(0)$ (meV)	$2\Delta(0)/k_B T_c$		T_c (K)	$2\Delta(0)$ (meV)	$2\Delta(0)/k_B T_c$
Al	1.19	0.36	3.5 ± 0.1	In	3.4	1.05	3.5 ± 0.1
Nb	9.2	2.90	3.6	Hg	4.15	1.65	4.6 ± 0.1
Pb	7.2	2.70	4.3 ± 0.05	Sn	3.72	1.15	3.5 ± 0.1
Ta	4.29	1.30	3.5 ± 0.1	Tl	2.39	0.75	3.6 ± 0.1
NbN	15	4.65	3.6	Nb ₃ Sn	18	6.55	4.2
NbSe ₂	7	2.2	3.7	MgB ₂	40	3.6-15	1.1 – 4.5

Mikroskopische Beschreibung

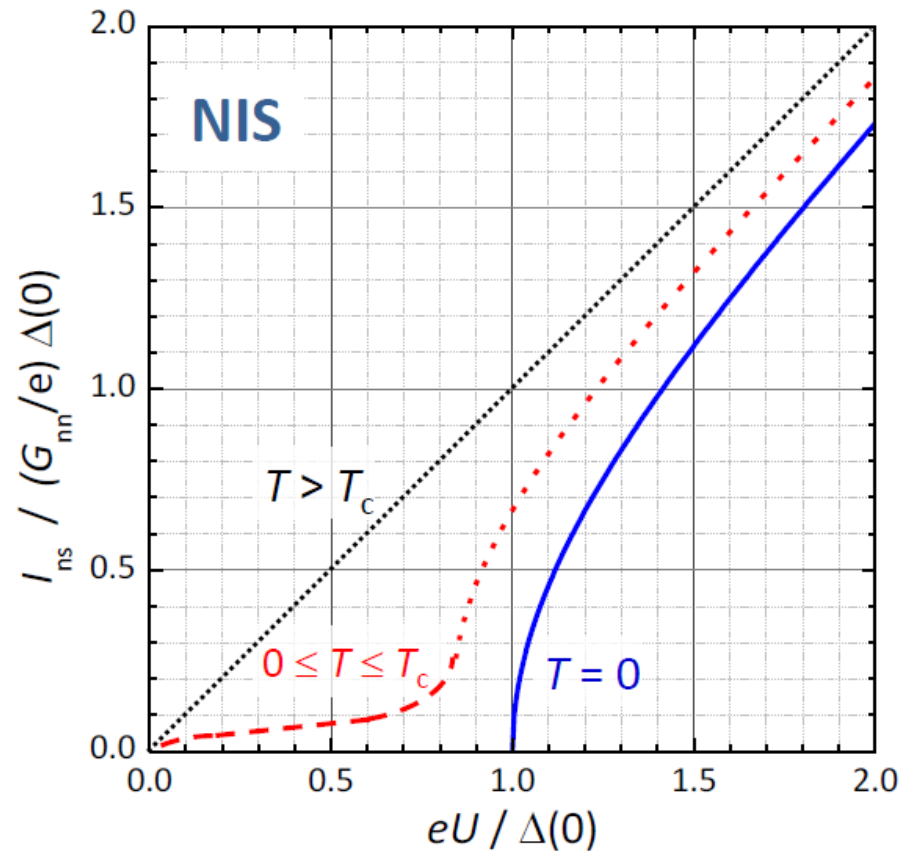
Abhängigkeit der Bandlücke von der Temperatur



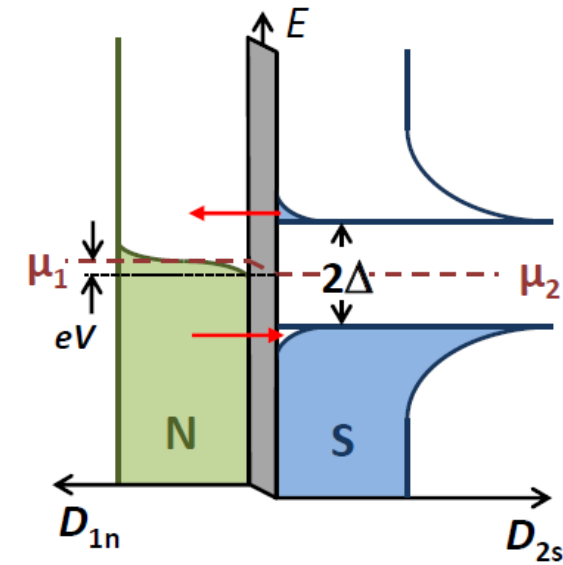
Mikroskopische Beschreibung

Bestimmung der Bandlücke

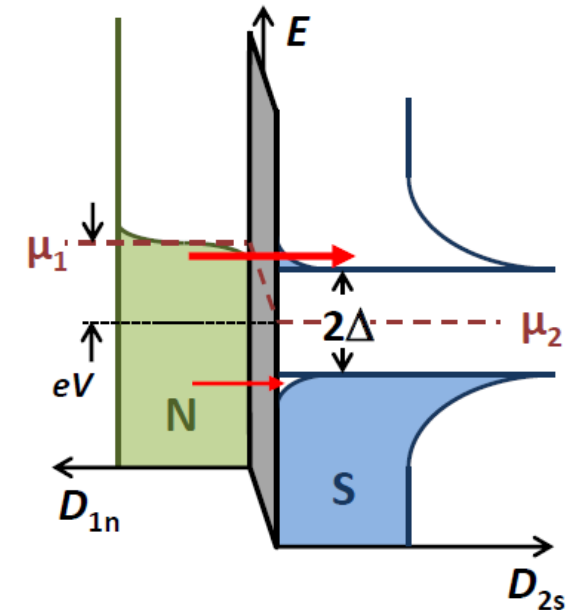
Tunnelkontakt zwischen Normalleiter und Supraleiter



$0 < eU < \Delta$:



$eU > \Delta$:



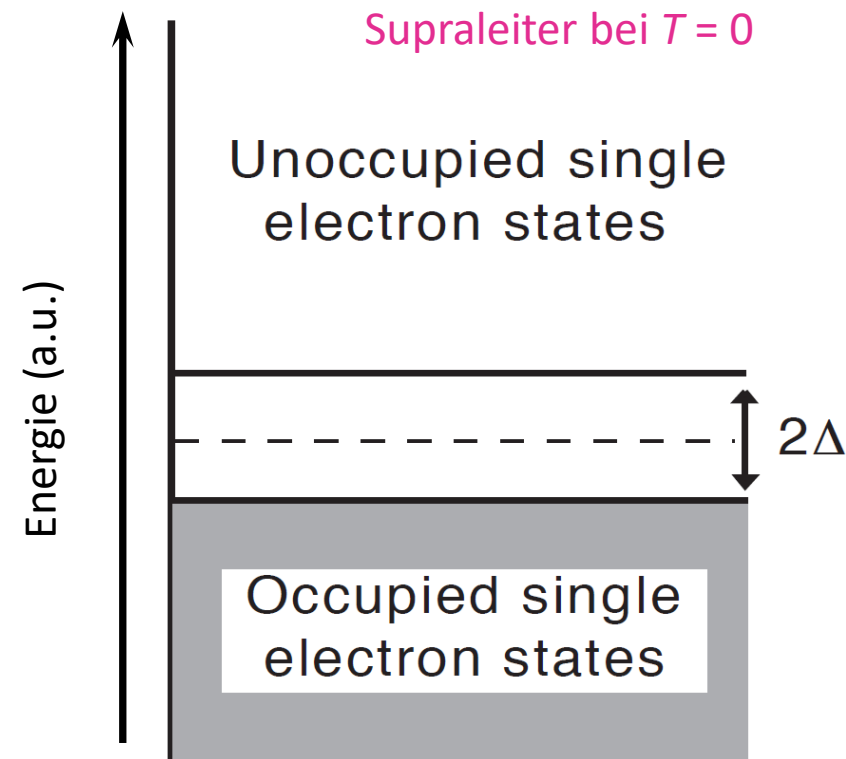
Mikroskopische Beschreibung

Bestimmung der Bandlücke

Absorption von elektromagnetischer Strahlung beim Durchgang durch Supraleiter

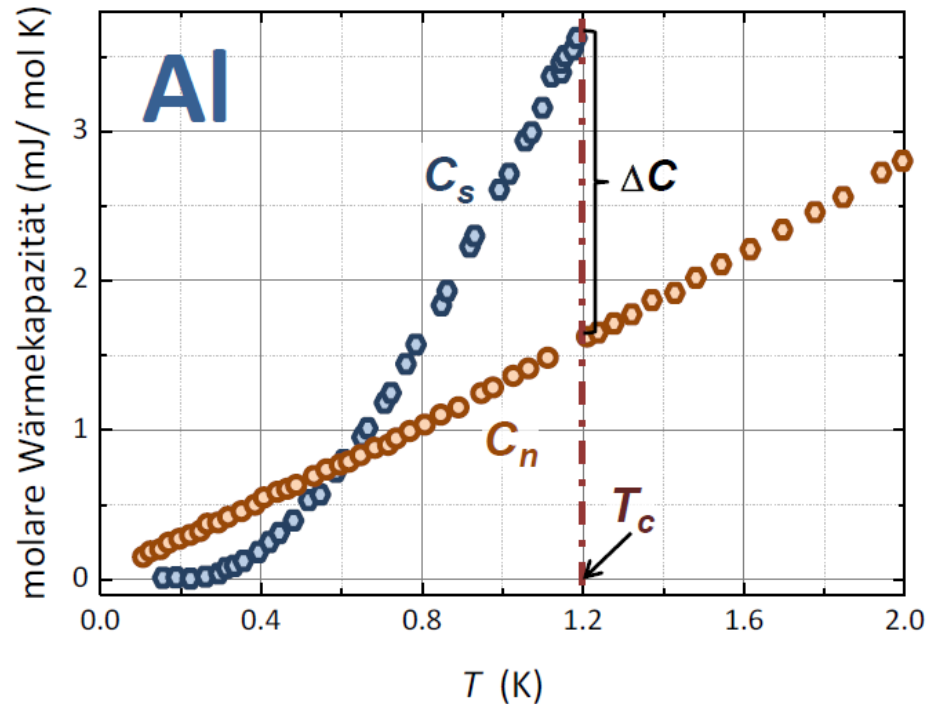
Für $h\nu < 2\Delta$ keine Anregung der Elektronen über Lücke möglich → keine Absorption

$2\Delta \sim$ wenige meV: erforderliche Strahlung im Mikrowellen- und fernen Infrarotbereich

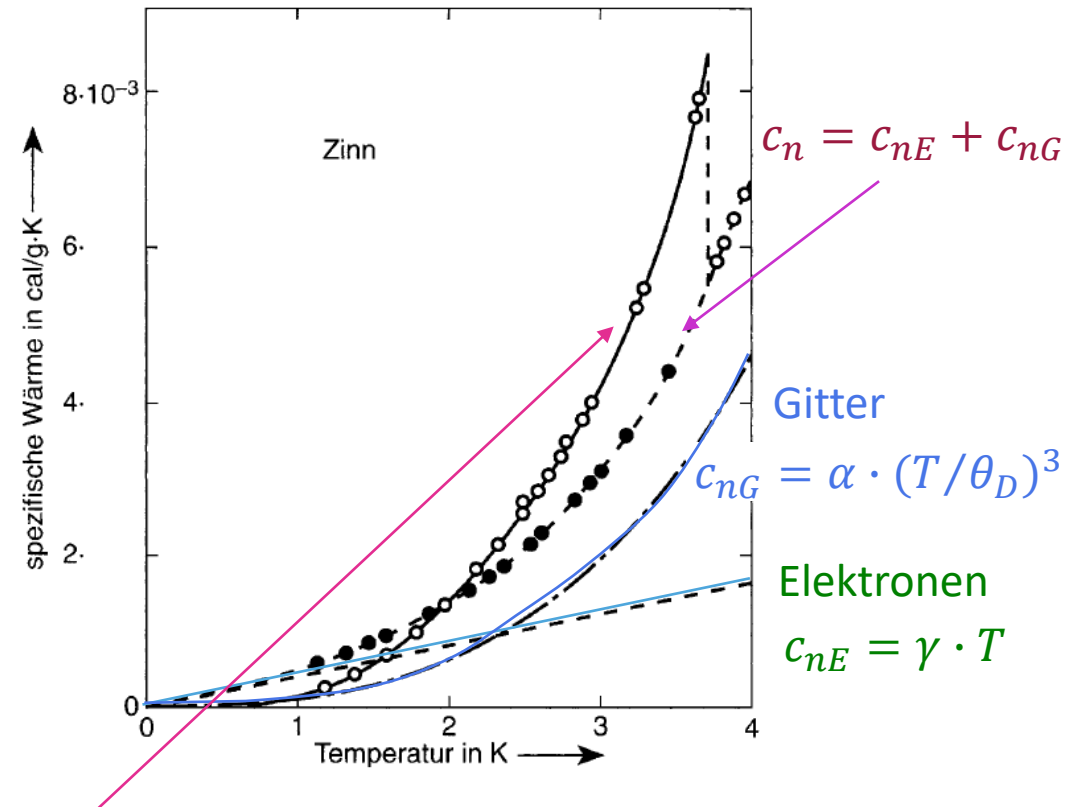


Mikroskopische Beschreibung

Wärmekapazität



N.E. Phillips,
Phys. Rev. **114**, 676 (1959)

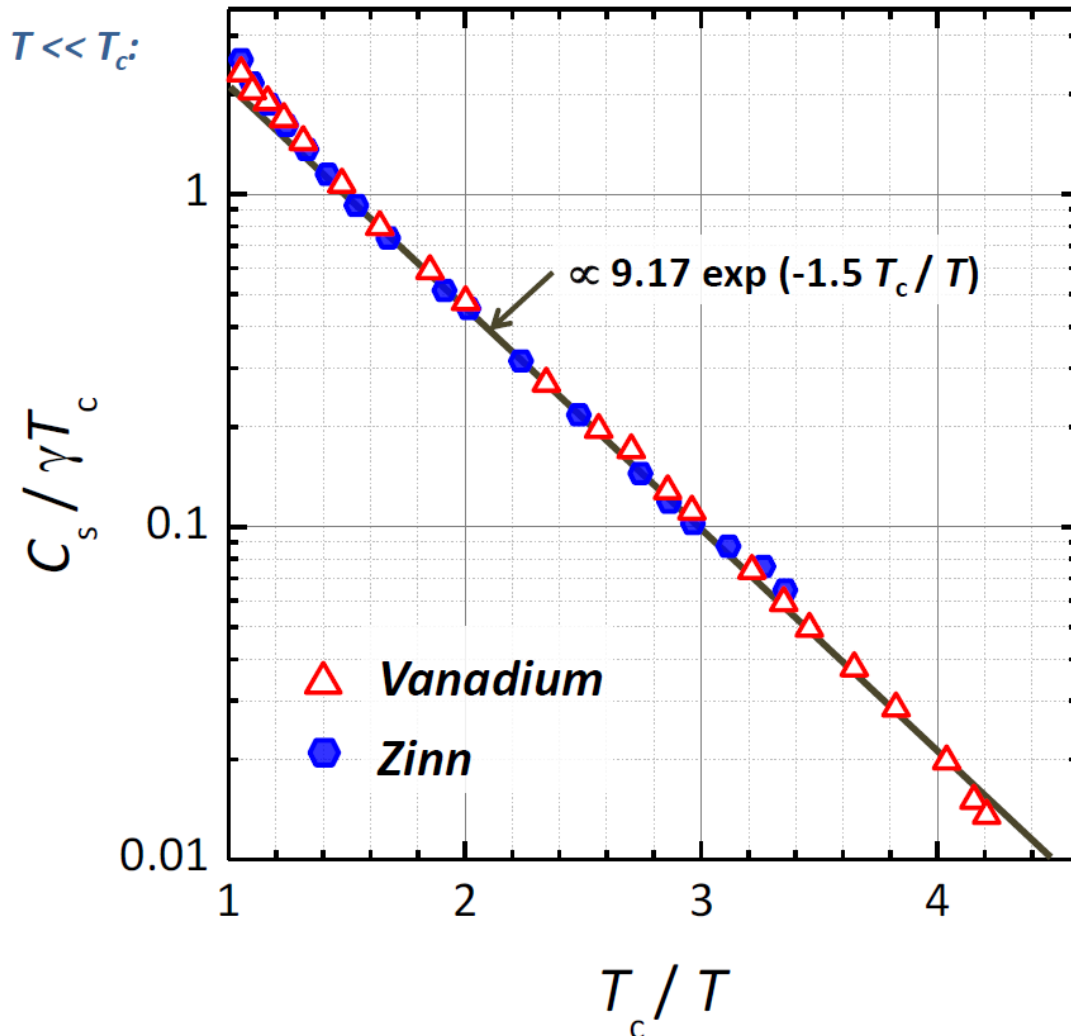


$$c_s = c_{sG} + 9.17\gamma \cdot T_c e^{-1.5T_c/T}$$

- Starker Anstieg der Wärmekapazität (viele thermisch angeregte Quasipartikel)
- BCS-Theorie: $\Delta C = 1.43 C_n$ (Sprung durch Phasenübergang)

Mikroskopische Beschreibung

Wärmekapazität



$$c_s = c_{sG} + 9.17\gamma \cdot T_c e^{-1.5T_c/T}$$

$$T \ll T_c$$

Exponentieller Abnahme von C_s
für tiefe Temperaturen $\rightarrow$ kann
zur Bestimmung der
Energilücke genutzt werden

$$c_s \propto e^{-\Delta(0)/k_B T}$$

Josephson Effekte

Supraleiter-Isolator-Supraleiterkontakt (SIS)

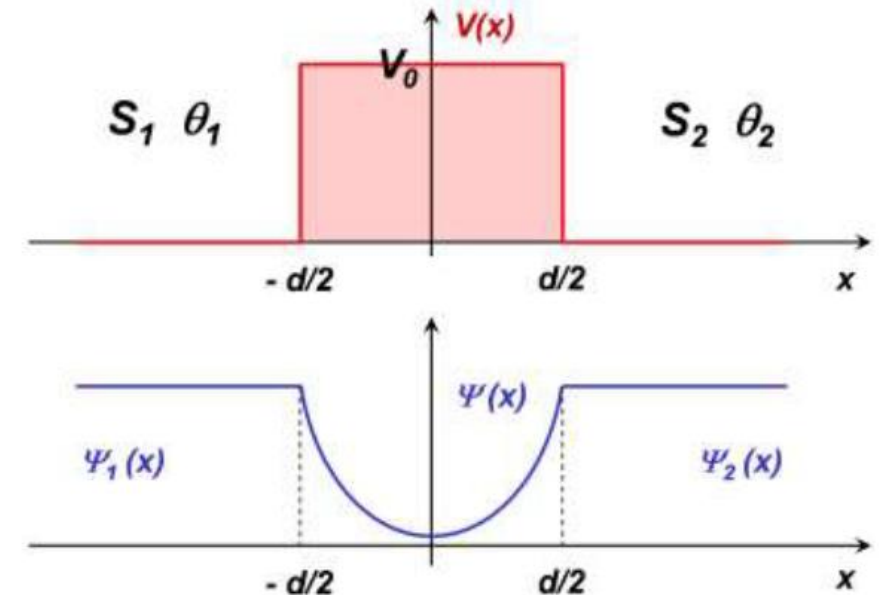
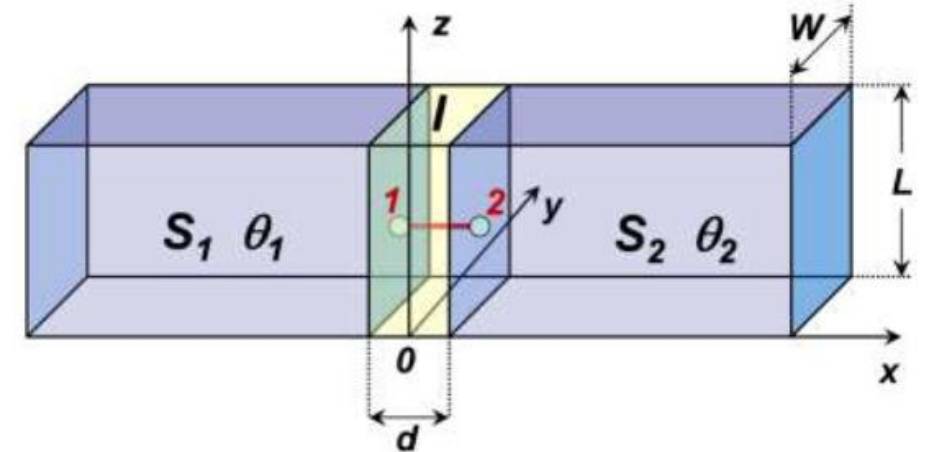
Was passiert wenn ich zwei Supraleiter schwach miteinander kopple?

$$\psi = \sqrt{n_s} e^{i\theta} \quad n_s = |\psi_0|^2$$

1. Josephson-Gleichung

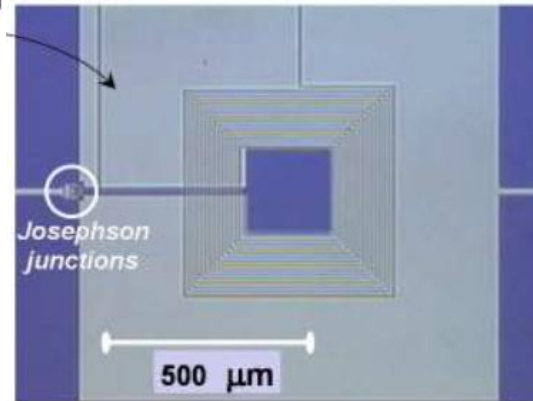
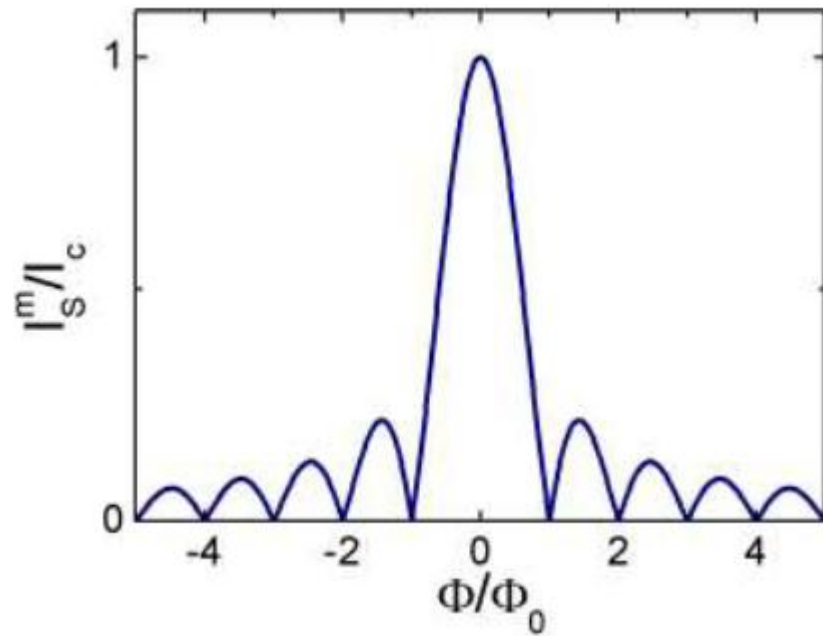
$$J_s(\varphi) = J_c \sin \varphi \quad \varphi \dots \text{Phasendifferenz}$$

- Suprastromdichte über Josephson-Kontakt variiert sinusförmig mit Phasendifferenz zwischen den Kontaktelektroden
- Suprastrom ist auch ohne Spannungsdifferenz vorhanden
- Phasendifferenz abhängig von äußeren Magnetfeldern

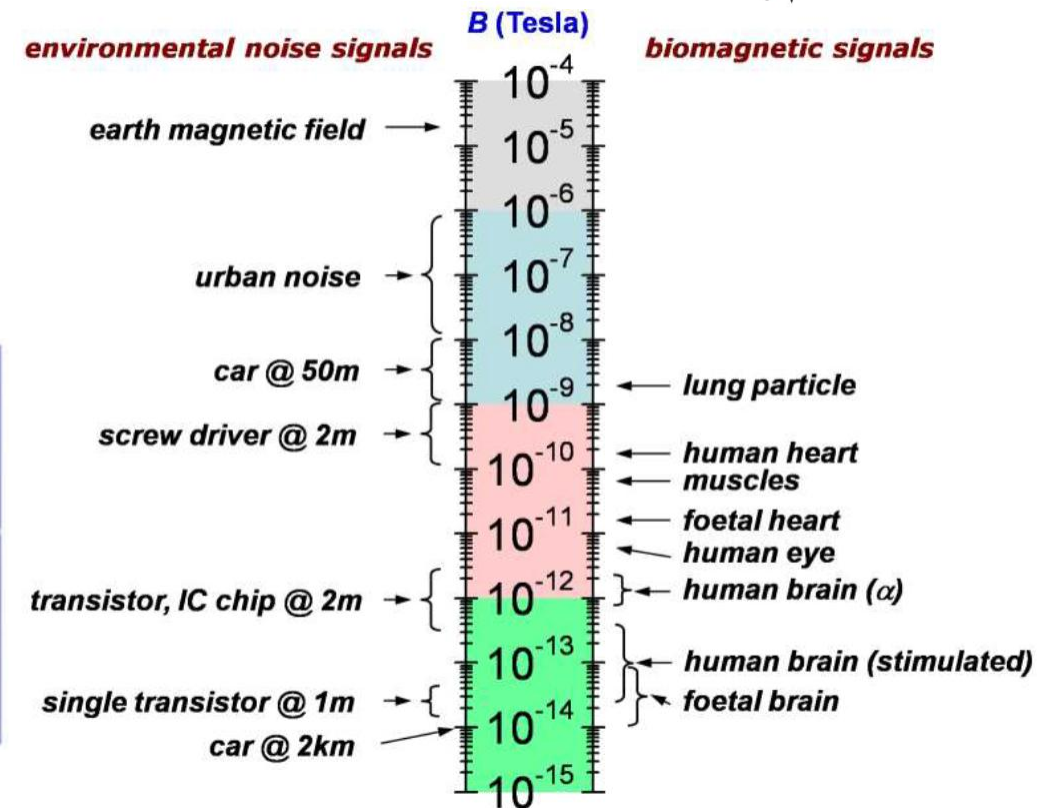
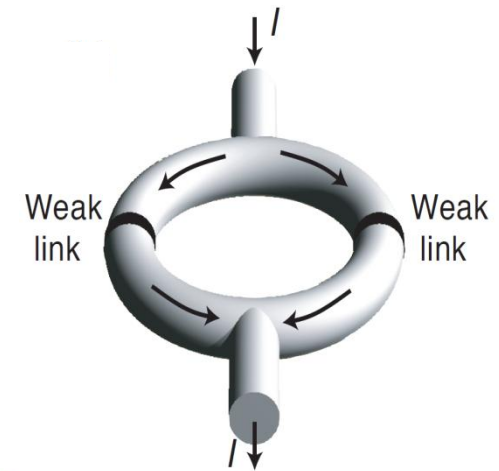


Josephson Effekte

Strom ist abhängig vom Magnetfeld



Supraleitende Quanteninterferenzdetektoren (SQUID)



Josephson Effekte

Supraleiter-Isolator-Supraleiterkontakt (SIS)

2. Josephson-Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_1^2 \underbrace{E(r, t) \cdot dl}_{\text{Spannungsabfall } U \text{ über dem Kontakt}}$$

Spannungsabfall U über dem Kontakt

Konstante Spannung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\Phi_0} U \cdot t$$

$$J_s(\varphi) = J_c \sin\left(\frac{2\pi}{\Phi_0} U \cdot t\right)$$

Josephson-Stromdichte oszilliert mit Josephson-Frequenz

$$\frac{f}{U} = \frac{1}{\Phi_0} \simeq 483.598 \text{ MHz}/\mu\text{V}$$

Definition des „Volt“

