

VEKTORANALYSIS UND GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

BATU GÜNEYSU

ZUSAMMENFASSUNG. Dies ist die offizielle Mitschrift der Vorlesung „Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen“, gehalten im Sommersemester 2025 an der Technischen Universität Chemnitz. Bitte beachten Sie, dass dieses Dokument nur für die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Vorlesung bestimmt ist.

Korrekturen nehmen wir gerne per E-Mail an batu.gueneysu@math.tu-chemnitz.de

INHALTSVERZEICHNIS

1. Vektoranalysis	2
1.1. Untermannigfaltigkeiten und Vektorfelder	2
1.2. Orientierbare Untermannigfaltigkeiten	12
1.3. Glatte k -Formen auf Untermannigfaltigkeiten	15
1.4. Integration von glatten m -Formen auf orientierten UMFen	28
1.5. Satz von Stokes	32
1.6. Klassische Integralsätze	36
2. Gewöhnliche Differentialgleichungen	39
2.1. Elementar lösbare DGLs	40
2.2. Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf	46
2.3. Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	52
2.4. Lineare DGLs m -ter Ordnung	60
2.5. Fundamentalsysteme im Falle konstanter Koeffizienten	66

1. VEKTORANALYSIS

1.1. Untermannigfaltigkeiten und Vektorfelder. Wir fixieren $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l \geq m$. Es sei daran erinnert, dass ein *glatter Diffeomorphismus (Diffeo)* $\phi : U \rightarrow V$ zwischen offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^l$ eine bijektive C^∞ -Abbildung ist, deren Umkehrabbildung ebenfalls C^∞ ist.

Definition 1.1.1. Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^l$ heißt eine *m-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit (UMF)* des $\mathbb{R}^l$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^l$ von a , eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^l$ und einen glatten Diffeo $\phi : U \rightarrow V$ mit

$$\phi(M \cap U) = \{x \in V : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}$$

gibt.

So ein ϕ heißt dann eine *extrinsische Karte für M bei a* und $M \cap U$ ein *extrinsisches Kartengebiet für M*.

Bemerkung 1.1.2. 1. UMF'en $M \subset \mathbb{R}^l$ werden mit der induzierten Euklidischen Abstandsfunktion selbst wieder stillschweigend metrische Räume. Hier ist $U \subset M$ offen in M , genau dann wenn $U = U' \cap M$ für eine offene Teilmenge $U' \subset M$ gilt. Ist $\phi : U \rightarrow V$ eine extr. Karte für M , so wird die induzierte Abbildung

$$\tilde{\phi} : M \supset \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m, \quad a \longmapsto \phi(a),$$

mit

$$\tilde{U} := M \cap U, \quad \tilde{V} := \phi(M \cap U)$$

eine *Karte für M* genannt. Hierbei haben wir

$$\{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\} \cong \mathbb{R}^m$$

identifiziert. Karten sind Homöomorphismen (stetig, bijektiv, Umkehrabbildung stetig) zwischen offenen Teilmengen von M bzw. $\mathbb{R}^m$.

2. Extr. Karten deren extr. Kartengebiet die ganze UMF überdecken werden manchmal auch globale extr. Karten genannt. Diese brauchen nicht zu existieren. Auch ist es manchmal der Fall, dass extr. Kartengebiete komplett in der UMF liegen.

3. Ersetzt man in der Definition eines glatten Diffeos C^∞ durch C^k , mit $k \in \mathbb{N}$, so bekommt man den Begriff des C^k -Diffeos und so den Begriff einer C^k UMF des $\mathbb{R}^l$. Wir werden in der Regel aber immer in der C^∞ - Situation arbeiten.

4. Es existiert der abstrakte Begriff einer m -dimensionalen glatten (oder C^k) Mannigfaltigkeit. Tatsächlich lässt sich nach dem berühmten Einbettungssatz von Whitney aus dem Jahre 1936 jede abstrakte m -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit als glatte m -dimensionale UMF des $\mathbb{R}^{2m+1}$ realisieren - allerdings auf keine kanonische Art.

Beispiel 1.1.3. 1. Jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte l -dimensionale UMF: Man wähle die globale extr. Karte $\phi := \text{id}_U : U \rightarrow U$.

2. Ist $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF, so wird jede (im Sinne von $M!$) offene Teilmenge $N \subset M$ eine glatte UMF des $\mathbb{R}^l$: Ist $\phi : U \rightarrow V$ extr. Karte bei $a \in N$ für M , so wird

$$U \cap N \longrightarrow \phi(U \cap N), \quad a \mapsto \phi(a)$$

eine extr. Karte bei a für N .

3. Sind $M_j \subset \mathbb{R}^{l_j}$ glatte m_j -dimensionale UMF, $j = 1, 2$, so ist $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{l_1} \times \mathbb{R}^{l_2}$ eine glatte $(m_1 + m_2)$ -dimensionale UMF. Ist $\phi_j : U_j \rightarrow V_j$ eine extr. Karte für M_j bei a_j , so wird $\phi := (\phi_1, \phi_2)$ eine extr. Karte für $M_1 \times M_2$ bei (a_1, a_2) .

4. Die Sphäre

$$\mathbb{S}^{l-1} := \{x \in \mathbb{R}^l : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^l$$

ist eine glatte $(l-1)$ -dimensionale UMF: Sei $a_1 := (0, \dots, 0, 1)$ der Nordpol und $a_2 := (0, \dots, 0, -1)$ der Südpol und seien

$$\sigma_j : \mathbb{S}^{l-1} \setminus \{a_i\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^l : x_i = 0\}$$

die entsprechenden stereographischen Projektionen. Diese sind extr. Karten, deren extr. Kartengebiete in $\mathbb{S}^{(l-1)}$ enthalten sind und $\mathbb{S}^{(l-1)}$ überdecken, sie bilden also einen extr. Atlas.

5. Die Menge aller invertierbaren $l \times l$ Matrizen $\text{GL}(l)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{l \times l} \cong \mathbb{R}^{l^2}$, also eine glatte l^2 -dimensionale UMF von $\mathbb{R}^{l \times l}$. Die behauptete Offenheit kann man wie folgt sehen: Die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{l \times l} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, und $\text{GL}(l)$ ist das Urbild unter $\det$ der offenen Teilmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$.

Satz 1.1.4. *Sei $l' \in \mathbb{N}$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^l$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{l'}$ glatt. Dann ist der Graph*

$$M := \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{l'}$$

von f eine glatte l -dimensionale UMF.

Beweis. Mit $U := \Omega \times \mathbb{R}^{l'}$ definiere

$$\phi : U \longrightarrow U, \quad \phi(x, y) := (x, f(x) - y).$$

Dies ist offenbar ein glatter Diffeo und bildet den Graphen von f auf $\Omega \times \{0\}$ ab, d.h. ϕ ist eine extr. globale Karte von M (deren extr. Kartengebiet nicht in M enthalten ist). ■

Ist $l' \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^l$ offen und

$$f = (f_1, \dots, f_{l'}) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{l'}$$

glatt, so bezeichnen wir für $a \in U$ mit $f'(a) \in \mathbb{R}^{l' \times l}$ die Jacobi-Matrix von f , d.h. $f'(a)_{ij} = \partial_j f_i(a)$. Die i -te Zeile von $f'(a)$ ist gerade $f'_i(a) \in \mathbb{R}^{1 \times l}$. Manchmal ist es vorteilhafter, $f'(a)$ einfach als lineare Abbildung $f'(a) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{l'}$ zu betrachten. Im Falle $l' = 1$ ist $f'(a)$ gerade die Transponierte des Gradientenvektors (ein Spaltenvektor)

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_l f(a))^T,$$

also der Zeilenvektor

$$f'(a) = (\nabla f(a))^T.$$

Satz 1.1.5. Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^l$ ist genau dann eine glatte m -dimensionale UMF, wenn es für alle $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^l$ von a und eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{l-m}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) Es gilt

$$M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \cdots = f_{l-m}(x) = 0\}.$$

(ii) Die Zeilen der Matrix $f'(a)$, also $f'_1(a), \dots, f'_{l-m}(a)$, sind linear unabhängig.

Beweis. $\Rightarrow$: Wähle eine extr. Karte $\phi : U \rightarrow V$ um a und definiere f durch $f_j := \phi_{m+j}$ für $j = 1, \dots, l-m$. Dann folgt i) aus

$$(1) \quad \phi(M \cap U) = \{x \in V : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}$$

und der Tatsache, dass die quadratische Matrix $\phi'(a)$ ein Isomorphismus ist (also linear unabhängige Zeilen hat).

$\Leftarrow$: Wegen (ii) existieren $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, so dass $v_1, \dots, v_m, f'_1(a), \dots, f'_{l-m}(a)$ eine Basis des $\mathbb{R}^l$ bilden. Für die Abbildung

$$\tilde{\phi} : U \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad \tilde{\phi}(x) := (\langle v_1, x \rangle, \dots, \langle v_m, x \rangle, f_1(x), \dots, f_{l-m}(x))$$

ist die quadratische Matrix $\tilde{\phi}'(a)$ ein Isomorphismus. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit existiert eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a , sodass

$$\phi : U_0 \longrightarrow \tilde{\phi}(U_0), \quad x \longmapsto \tilde{\phi}(x)$$

ein glatter Diffeo wird. Wegen (i) gilt dann auch (1). ■

Definition 1.1.6. Sei $l' \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^l$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{l'}$ glatt. Dann heißt $c \in \mathbb{R}^{l'}$ ein regulärer Wert von F , wenn für alle a aus der Niveaumenge $F^{-1}(c)$ die Matrix $F'(a)$ vollen Rang l' hat (es folgt dann $l \geq l'$).

Satz 1.1.7. In obiger Situation sei c ein regulärer Wert von F und $M := F^{-1}(c) \neq \emptyset$. Dann ist M eine m -dimensionale UMF des $\mathbb{R}^l$, mit $m := l - l'$.

Beweis. Definiere

$$f := F - c : U \longrightarrow \mathbb{R}^{l-m}.$$

Dann ist $M = f^{-1}(0)$ und die Bedingung (i) von Satz 16 ist erfüllt. Die Bedingung (ii) folgt aus der Tatsache, dass $f'_1(a), \dots, f'_{l-m}(a) = F'_1(a), \dots, F'_{l-m}(a)$ für alle $a \in M$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, da $F'(a)$ vollen Rang hat. ■

Es bezeichne $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}$ den Raum aller symmetrischen $l \times l$ Matrizen über $\mathbb{R}$. Mit dem obigen Satz kann man folgende wichtige UMF'en bekommen:

Beispiel 1.1.8. 1. Für jedes $A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}$ ist

$$M := \{x \in \mathbb{R}^l : \langle x, Ax \rangle = 1\}$$

eine $(l-1)$ dimensionale glatte UMF des $\mathbb{R}^l$. Denn: Es gilt $M = F^{-1}(1)$, mit

$$F : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \langle x, Ax \rangle = x^T Ax,$$

und $F'(x) \in \mathbb{R}^{1 \times l}$ ist gegeben durch $F'(x) = x^T A$. Mittels $A := E_l$ kann so auch $\mathbb{S}^{l-1} \subset \mathbb{R}^l$ konstruieren.

2. Orthogonale Gruppe $O(l)$ aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{l \times l}$ mit $A^* A = E_l$ ist eine glatte $\frac{1}{2}l(l-1)$ dimensionale UMF des $\mathbb{R}^{l \times l}$. Es gilt $O(l) = F^{-1}(E_l)$ mit

$$F : \mathbb{R}^{l \times l} \longrightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}, \quad F(A) := A^T A.$$

Für $A \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ist die lineare Abbildung $F'(A)$ gegeben durch

$$F'(A) : \mathbb{R}^{l \times l} \longrightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}, \quad F'(A)B = A^T B + B^T A.$$

Die orthogonale Gruppe ist ein Beispiel für eine sogenannte Lie-Gruppe: Diese sind glatte UMF'en, welche zugleich Gruppen mit glatten Gruppenoperationen sind. Lie-Gruppen spielen u.a. eine fundamentale Rolle in der theoretischen Physik.

Wir kommen nun zum Konzept einer glatten UMF mit Rand:

Definition 1.1.9. Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^l$ heißt eine *m-dimensionale glatte UMF des $\mathbb{R}^l$ mit Rand*, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^l$ von a , eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^l$ und einen glatten Diffeo $\phi : U \rightarrow V$ gibt, sodass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

i) Es gilt

$$\phi(M \cap U) = \{x \in V : x_{m+1} = \dots = x_l = 0\}.$$

ii) Es gilt

$$\phi(M \cap U) = \{x \in V : x_m \geq 0, x_{m+1} = \dots = x_l = 0\}$$

und für die m -te Koordinate von ϕ in a gilt $\phi_m(a) = 0$.

So ein ϕ heißt dann eine *extr. Karte für M bei a* und $M \cap U$ ein *extr. Kartengebiet für M* .

Wir werden der folgenden Konvention folgen:

Bemerkung 1.1.10. 1. Ist $A \subset \mathbb{R}^{m_1}$ eine beliebige (also nicht notwendigerweise offene) Teilmenge, so nennen wir eine stetige Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ glatt, falls jeder Punkt $a \in A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{m_1}$ hat, sodass sich $f|_{A \cap U}$ sich zu einer glatten Funktion auf U fortsetzen lässt.

2. Ist $B \subset \mathbb{R}^{m_2}$, so nennt man $f : A \rightarrow B$ glatt, falls die induzierte Abbildung $A \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ glatt ist. Falls $m_1 = m_2 = m$, so definiert man glatte Diffeos $f : A \rightarrow B$ als bijektive und glatte Abbildungen mit $f^{-1} : B \rightarrow A$ glatt.

Definition 1.1.11. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine m -dimensionale glatte UMF des $\mathbb{R}^l$ mit Rand.

1. Ist $\phi : U \rightarrow V$ eine extr. Karte für M , so wird der induzierte Homöomorphismus

$$\tilde{\phi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}, \quad a \longmapsto \phi(a),$$

mit

$$\tilde{U} := M \cap U, \quad \tilde{V} := \phi(M \cap U)$$

eine Karte für M mit Kartengebiet $\tilde{U}$ genannt. Hierbei ist $\tilde{V}$ im Falle i) eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ und im Falle ii) eine offene Teilmenge des Halbraumes

$$\mathbb{R}_+^m := \{x \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}.$$

2. Sind $\tilde{\phi}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \tilde{V}_j$, mit $j = 1, 2$, Karten für M mit $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$, so nennt man den glatten Diffeo

$$\tilde{\phi}_2 \circ \tilde{\phi}_1^{-1} : \phi_1(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2) \longrightarrow \phi_2(\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2)$$

einen *Kartenwechsel* oder eine *Koordinatentransformation* für M .

3. Eine Familie von Karten $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i$, $i \in I$, heißt ein *Atlas* für M , falls die Kartengebiete M überdecken, also

$$M = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i.$$

Satz 1.1.12. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand und sei $a \in M$. Dann gilt für jede extr. Karte für M bei a genau eine der Bedingungen i) und ii) aus der obigen Definition.

Beweis. Übung. ■

Definition 1.1.13. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand. Dann heißt

$$\partial M := \{a \in M : \text{es existiert eine extr. Karte bei } a \text{ mit ii) von Def. 1.1.9}\} \subset M$$

der *Rand* von M , und

$$\overset{\circ}{M} := \{a \in M : \text{es existiert eine extr. Karte bei } a \text{ mit i) von Def. 1.1.9}\} \subset M$$

das *Innere* von M .

Es ist also in obiger Situation M die disjunkte Vereinigung $M = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$, und es ist leicht zu sehen, dass $\overset{\circ}{M} \subset M$ offen ist und somit $\partial M \subset M$ abgeschlossen.

Beispiel 1.1.14. 1. Jede glatte m -dimensionale UMF $M \subset \mathbb{R}^l$ ist nach Konvention auch eine glatte m -dimensionale UMF des $\mathbb{R}^l$ mit Rand. Es gilt $\partial M = \emptyset$.

2. Jede glatte m -dimensionale UMF $M \subset \mathbb{R}^l$ mit Rand ist eine glatte m -dimensionale UMF des $\mathbb{R}^l$, genau dann wenn $\partial M = \emptyset$.

3. $M := \{x \in \mathbb{R}^l : |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^l$ ist eine l -dimensionale UMF mit Rand. Es gilt $\partial M = \mathbb{S}^{l-1}$.

4. Der Halbraum $\mathbb{R}_+^l \subset \mathbb{R}^l$ ist eine glatte l -dimensionale UMF mit Rand. Es gilt $\partial \mathbb{R}_+^l = \{x \in \mathbb{R}^l : x_l = 0\}$.

5. Jede offene Teilmenge $U \subset M$ einer m -dimensionalen glatte UMF $M \subset \mathbb{R}^l$ mit Rand ist ebenfalls so ein Raum. Es gilt $\partial U = U \cap \partial M$.

Bemerkung 1.1.15. Für eine offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}_+^l$ stimmt der Rand bzw. das Innere im Sinne von UMF (also wie oben) nicht mit dem Rand/Inneren im Sinne von Teilmengen des metrischen Raumes $\mathbb{R}_+^l$ wie in Ana2 überein. Z.B. ist $\mathbb{R}_+^l$ als metrischer Raum natürlich per Definition offen (hat also keinen topologischen Rand), sein UMF - Rand ist aber $\{x \in \mathbb{R}^l : x_l = 0\}$.

Satz 1.1.16. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand, und es gelte $\partial M \neq \emptyset$. Dann ist $\partial M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte $(m-1)$ -dimensionale UMF und $\overset{\circ}{M} \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF.

Beweis. Aus $\partial M \neq \emptyset$ folgt $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$ (wieso?) und die zweite Behauptung wird trivial. Für die erste Behauptung sei $a \in \partial M$ und wähle eine extr. Karte $\phi : U \rightarrow V$ bei a vom Typ (ii), also

$$\phi(M \cap U) = \{x \in V : x_m \geq 0, \quad x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}, \quad \phi_n(a) = 0.$$

Für alle $y \in \partial M \cap U$ folgt $\phi_n(y) = 0$, da man sonst wegen $\phi_n(y) > 0$ durch Einschränken eine extrinsische Karte um y vom Typ (i) erhalten würde. Es folgt

$$\phi(\partial M \cap U) = \{x \in V : x_m = \cdots = x_l = 0\},$$

und man hat die gewünschten extr. Karten bekommen. ■

Definition 1.1.17. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine m -dimensionale glatte UMF mit Rand. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^l$ heißt ein *Tangentialvektor an M im Punkt $a \in M$* , falls es eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$ und $\dot{\gamma}(0) = v$ gibt, wobei I ein Intervall der Art $(-\epsilon, \epsilon)$, $[0, \epsilon)$, $(-\epsilon, 0]$ ist. Die Menge aller Tangentialvektoren im Punkt a wird mit $T_a M$ bezeichnet und der *Tangentialraum von M in a* genannt.

Oft kann man sich den *affinen Tangentialraum* $a + T_a M$ besser vorstellen.

Satz 1.1.18. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine m -dimensionale glatte UMF mit Rand. Für alle $a \in M$ ist dann $T_a M \subset \mathbb{R}^l$ ein Unterraum der Dimension m .

Beweis. Man wähle eine extr. Karte $\phi : U \rightarrow V$ für M bei a . Dann ist $\phi'(a) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ ein linearer Isomorphismus und erhält daher die Dimensionen von Teilräumen. Wir zeigen im Folgenden

$$(2) \quad \phi'(a)^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}) = T_a M.$$

Sei hierzu $w \in \{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}$ und betrachte die glatte Kurve

$$\gamma : I \rightarrow U, \quad \gamma(t) := \phi^{-1}(\phi(a) + tw),$$

wobei

$$I = \begin{cases} (-\epsilon, \epsilon), & \text{falls } a \in \overset{\circ}{M}, \\ [0, \epsilon), & \text{falls } a \in \partial M \text{ und } w_n > 0, \\ (-\epsilon, 0], & \text{falls } a \in \partial M \text{ und } w_n < 0, \end{cases}$$

und $\epsilon > 0$ genügend klein ist, sodass $\phi(a) + tw \in V$ für alle $t \in I$. Es folgt

$$\phi(a) + tw \in \{x \in V : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}$$

und

$$\gamma(t) = \phi^{-1}(\phi(a) + tw) \in M \cap U \subset M.$$

Weiterhin gilt $\gamma(0) = a$ und mit der Kettenregel

$$\gamma'(0) = (\phi^{-1})'(\phi(a))w = \phi'(a)^{-1}w,$$

also nach Definition von $T_a M$ auch $\phi'(a)^{-1}(w) \in T_a M$.

Ist umgekehrt $v \in T_a M$, wähle eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma'(0) = v$. Macht man I klein genug, so folgt $\gamma(t) \in U$ für alle $t \in I$, also

$$\phi(\gamma(t)) \in \{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}.$$

Aus der Kettenregel folgt dann

$$\phi'(a)\gamma'(0) \in \{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\},$$

also

$$v = \gamma'(0) \in \phi'(a)^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \cdots = x_l = 0\}).$$

■

Satz 1.1.19. Sei $l' \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^l$ und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{l'}$ glatt, sowie $c \in \mathbb{R}^{l'}$ ein regulärer Wert von F . Dann ist mit $m := l - l'$, für die glatte m -dimensionale UMF $M := F^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^l$ der Tangentialraum in $a \in M$ gegeben durch

$$T_a M = \text{Ker}(F'(a)).$$

Beweis. Für jede glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ gilt $F \circ \gamma = c$, und so $F'(a)\dot{\gamma}(0) = 0$, also

$$T_a M \subset \text{Ker}(F'(a)).$$

Da $F'(a) : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{l'}$ surjektiv ist, folgt

$$\dim \text{Ker}(F'(a)) = l - l' = m,$$

also dann auch $T_a M \subset \text{Ker}(F'(a))$.

■

Beispiel 1.1.20. 1. Für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}_+^l$ und jedes $a \in U$ gilt $T_a U = \mathbb{R}^l$.

2. Für $A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}$ sei

$$M := \{x \in \mathbb{R}^l : \langle x, Ax \rangle = 1\}.$$

Für alle $a \in M$ ist dann

$$T_a M = \{v \in \mathbb{R}^l : \langle a, Av \rangle = 0\}.$$

Insbesondere folgt für $\mathbb{S}^{l-1} \subset \mathbb{R}^l$ so auch

$$T_a \mathbb{S}^{l-1} = \{v \in \mathbb{R}^l : \langle a, v \rangle = 0\}.$$

3. Für das Einheitselement $E_l \in O(l)$ gilt

$$T_{E_l} O(l) = \{B \in \mathbb{R}^{l \times l} : B^T + B = 0\}.$$

Definition 1.1.21. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine m -dimensionale glatte UMF mit Rand und $a \in M$. Der Normalenraum $N_a M$ in a ist definiert als das orthogonale Komplement zu $T_a M \subset \mathbb{R}^l$, also

$$N_a M := (T_a M)^\perp.$$

Es gilt also $\dim(N_a M) = l - m$.

Korollar 1.1.22. Sei $l' \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^l$ und

$$F = (F_1, \dots, F_{l'}) : U \rightarrow \mathbb{R}^{l'}$$

glatt, $c \in \mathbb{R}^{l'}$ ein regulärer Wert von F und $M := F^{-1}(c) \neq \emptyset$, sodass also $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF wird, mit $m := l - l'$. Dann bilden für alle $a \in M$ die Vektoren $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_{l'}(a)$ eine Basis von $N_a M$.

Beweis. Die i -te Zeile von $F'(a)$ ist gerade $(\nabla F_i(a))^T$. Damit ist ein Vektor $v \in \mathbb{R}^l$ genau dann in $T_a M$, wenn

$$0 = F'_i(a)v = (\nabla F_i(a))^T v = \langle \nabla F_i(a), v \rangle,$$

und es folgt zunächst $\nabla F_1(a), \dots, \nabla F_{l'}(a) \in N_a M$. Da c ein regulärer Wert ist, sind diese l' -vielen Vektoren linear unabhängig, und bilden somit eine Basis von $N_a M$. ■

Definition 1.1.23. Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^l$ glatte UMF'en (möglicherweise verschiedener Dimension), die sich in einem Punkt $a \in \mathbb{R}^l$ schneiden. Dann sagt man M_1 und M_2 *stehen senkrecht aufeinander in a* , falls $N_a M_1 \perp N_a M_2$.

Bemerkung 1.1.24. 1. Man mache sich klar, warum man Normalenräume und nicht Tangentialräume für diese Definition nimmt (senkrechte Ebenen!).

2. Gilt $M_1 = F^{-1}(c)$, $M_2 = G^{-1}(d)$, wobei $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ glatt sind mit $U, V \subset \mathbb{R}^l$ offen und $c \in \mathbb{R}$ bzw. $d \in \mathbb{R}$ einem regulären Wert von F bzw. G , so ist $N_a M_1 \perp N_a M_2$ äquivalent zu $\nabla F(a) \perp \nabla G(a)$.

Beispiel 1.1.25. Sei

$$M_1 := \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

die Sphäre und

$$M_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

die x-y Ebene und $a = (1, 0, 0) \in M_1 \cap M_2$. Dann ist

$$a + T_a M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1\}, \quad a + T_a M_2 = M_2$$

also

$$T_a M_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}, \quad T_a M_2 = M_2$$

und

$$N_a M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\} \perp \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 = 0\} = N_a M_1.$$

Nun betrachten wir glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten und ihre Differentiale:

Definition 1.1.26. Seien $M_j \subset \mathbb{R}^{l_j}$ glatte l_j -dimensionale UMF mit Rand. Dann bezeichnen wir mit $C^\infty(M_1, M_2)$ die Menge aller glatten Abbildungen $f : M_1 \rightarrow M_2$ im Sinne von Bemerkung 1.1.10.

Das folgende Lemma liefert eine intrinsische Charakterisierung von glatten Abbildungen:

Lemma 1.1.27. Seien $M_j \subset \mathbb{R}^{l_j}$ glatte l_j -dimensionale UMF mit Rand. Dann ist eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ genau dann glatt, wenn für jede Karte $\tilde{\phi}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \tilde{V}_j$ von M_j die induzierte Abbildung

$$\tilde{\phi}_2 \circ f \circ \tilde{\phi}_1^{-1} : \tilde{\phi}_1(\tilde{U}_1 \cap f^{-1}(\tilde{U}_2)) \longrightarrow \tilde{V}_2$$

glatt ist.

Beweis. Übung. ■

Glatte Diffeos $M_1 \rightarrow M_2$ sind nun wieder auf die offensichtliche Art definiert: glatt, bijektiv, Umkehrabbildung glatt. Jede Karte ist ein glatter Diffeo.

Definition 1.1.28. Seien $M_j \subset \mathbb{R}^{l_j}$ glatte m_j -dimensionale UMF mit Rand, $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ und $x \in M_1$. Unter dem *Differential von f in x* versteht man die Abbildung

$$df(x) : T_x M_1 \longrightarrow T_{f(x)} M_2, \quad df(x)v = (f \circ \gamma)'(0),$$

wobei $v = \gamma'(0)$.

Bemerkung 1.1.29. 1. Diese Konstruktion ist wohldefiniert: Ist $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine Karte bei $x \in M_1$, so folgt aus der Kettenregel für die Abbildung $f \circ \gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^l$,

$$(f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \tilde{\phi}^{-1})'(\tilde{\phi}(x))\tilde{\phi}'(x)\gamma'(0).$$

Diese Formel zeigt auch, dass $df(x) : T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2$ eine lineare Abbildung ist und die Kettenregel im Fall für eine weitere glatte Abbildung $g : M_2 \rightarrow M_3$ gilt:

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x))df(x).$$

2. Sind $M_j \subset \mathbb{R}^{m_j}$ offene Teilmengen, so gilt für $x \in M_1$, $v \in T_x M_1 = \mathbb{R}^{m_1}$,

$$df(x)v = \frac{d}{dt} f(x + tv)|_{t=0} = f'(x)v,$$

d.h. $f'(x)$ ist gerade die Jacobi-Matrix in x von f .

Sei von nun an $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte l -dimensionale UMF mit Rand.

Definition 1.1.30. Eine glatte Abbildung $X : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ heißt *ein glattes Vektorfeld auf M* , falls $X(x) \in T_x M$ für alle $x \in M$. Die Menge aller glatten Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}(M)$ bezeichnet.

Die Menge

$$C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$$

wird mit punktweise definierter Addition und Multiplikation ein Ring. Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $X_1 + X_2$ punktweise definiert und wieder in $\mathfrak{X}(M)$, und für $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt mit punktweiser Definition auch $fX \in \mathfrak{X}(M)$. D.h., $\mathfrak{X}(M)$ ist $C^\infty(M)$ -Modul.

Beispiel 1.1.31. 1. Für $M \subset \mathbb{R}^l$ offen ist $\mathfrak{X}(M)$ gerade die Menge aller glatten Abbildungen $X : M \rightarrow \mathbb{R}^l$.

2. Betrachte $X : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$X(x, y, z) := (-y, x, 0)^T.$$

Dann ist X glatt (als Einschränkung des glatten Vektorfeldes $(x, y, z) \mapsto (-y, x, 0)^T$ auf $\mathbb{R}^3$). Es gilt

$$\langle X(a), a \rangle = 0$$

für alle $a \in \mathbb{S}^2$, also $X(a) \in T_a \mathbb{S}^2$, also $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$ nach Beispiel 1.1.20.

Lokal bekommt man in Karten immer kanonische Vektorfelder:

Beispiel 1.1.32. Sei

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

eine Karte für M , d.h. x_j ist die j -te Komponentenfunktion von $\tilde{\phi}$. Dann erhalten für alle $i = 1, \dots, m$ ein glattes Vektorfeld

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(\tilde{U}),$$

das j -te kanonische Basisvektorfeld bezüglich $\tilde{\phi}$, via

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a) := \frac{d}{dt}(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(a) + te_i)) = d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(a))e_i = \partial_i \tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(a)) \in T_a M.$$

Da

$$d\phi(a)^{-1} : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

ein linearer Isomorphismus ist, welcher nach dem Beweis von Satz 1.1.18

$$\{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \dots = x_l = 0\} \longrightarrow T_a M$$

abbildet, ist

$$d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(a)) = d\tilde{\phi}(a)^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow T_a M$$

ein linearer Isomorphismus, und aus

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(a) = d\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{\phi}(a))e_i$$

folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(a), \dots, \frac{\partial}{\partial x^i}(a) \in T_a M \quad \text{für alle } a \in \tilde{U} \text{ eine Basis von } T_a M \text{ ist.}$$

Beispiel 1.1.33. a) Euklidische Koordinaten: Sei

$$\tilde{\phi} = \phi = (x_1, \dots, x_l) : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad \phi(a) = a.$$

Dann ist $\phi = \tilde{\phi}$ und die j -te Komponentenfunktion x_j von ϕ gerade $a \mapsto a_j$. Es folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a) = e_i \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^l.$$

b) Polarkoordinaten für $M = \mathbb{R}^2$: Betrachte den glatten Diffeo

$$\psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) =: V \longrightarrow U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

gegeben durch

$$\psi(s, \alpha) := (s \cos(\alpha), s \sin(\alpha))^T.$$

Dann ist

$$\phi = \tilde{\phi} := \psi^{-1} = (r, \theta) : U \longrightarrow V$$

eine Karte für M . Für $a = (a_1, a_2)^T = \psi(s, \alpha) \in U$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial r}(a) = \frac{\partial \psi}{\partial r}(s, \alpha) = (\sin(\alpha), \cos(\alpha))^T = a/s.$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(a) = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(s, \alpha) = (-s \cos(\alpha), s \sin(\alpha))^T = (-a_2, a_1)^T.$$

Bemerkung 1.1.34. Sei

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

eine Karte für M und sei $X \in \mathfrak{U}$ (zum Beispiel die Einschränkung auf $\tilde{U}$ eines glatten Vektorfelds auf M). Dann gibt für alle $a \in \tilde{U}$ und $i = 1, \dots, m$ eine eindeutig bestimmte Zahl $\zeta_i(a) \in \mathbb{R}$ mit

$$X(a) = \sum_{i=1}^m X_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}(a).$$

Die Funktionen $X_j : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ sind glatt, denn es gilt

$$X[x_j](a) = \sum_{i=1}^m X_i(a) \frac{\partial}{\partial x_i}[x_j](a) = X_j(a),$$

und die linke Seite hängt nach Übungsblatt 2 glatt von a ab.

1.2. Orientierbare Untermannigfaltigkeiten. *Erinnerung:* Ist V ein m -dimensionaler reeller Vektorraum, so heißen zwei geordnete Basen $(a_1, \dots, a_m)$ und $(b_1, \dots, b_m)$ von V *gleichorientiert*, falls die Basiswechselmatrix

$$T_{(b_1, \dots, b_m)}^{(a_1, \dots, a_m)} \in \text{GL}(m) := \{S \in \mathbb{R}^{m \times m} : \det(S) \neq 0\}$$

die Bedingung

$$\det \left(T_{(b_1, \dots, b_m)}^{(a_1, \dots, a_m)} \right) > 0$$

erfüllt. Gleichorientiertheit ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geordneten Basen von V . Eine *Orientierung* von V ist eine Äquivalenzklasse

$$\mathcal{O} = [(a_1, \dots, a_m)]$$

von geordneten Basen von V . Eine Basis $(b_1, \dots, b_m)$ auf dem orientierten Vektorraum $(V, \mathcal{O})$ heißt *positiv orientiert*, falls $(b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{O}$, d.h. falls $(b_1, \dots, b_m)$ zu einer/jeder die Orientierung von V definierenden Basis gleichorientiert ist.

Jeder endlich-dimensionale reelle Vektorraum hat immer genau zwei Orientierungen. Der Raum $\mathbb{R}^m$ fixieren wir immer die Orientierung

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^m} = [(e_1, \dots, e_m)].$$

Z.B. ist dann jede geordnete Basis (b_1, b_2) von $\mathbb{R}^2$ genau dann positiv orientiert, wenn b_1 durch eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn um einen Winkel $< \pi$ in ein positives Vielfaches von b_2 überführt werden kann (Daumen/Zeigefinger). Insbesondere ist (e_2, e_1) nicht positiv orientiert. Im $\mathbb{R}^3$ gibt es die Drei-Finger-Regel.

Definition 1.2.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand. Dann heißt eine Familie $\mathcal{O}_M = (\mathcal{O}_{T_x M})_{x \in M}$, mit $\mathcal{O}_{T_x M}$ einer Orientierung von $T_x M$ für alle $x \in M$, eine *Orientierung von M* , falls für alle $x \in M$ eine Karte

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

mit $x \in \tilde{U}$ existiert, so dass

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(y) \right) \in \mathcal{O}_{T_y M} \quad \text{für alle } y \in \tilde{U}.$$

Eine Karte wie oben heißt *positiv orientiert*, und das Paar $(M, \mathcal{O}_M)$ heißt *orientierte glatte m -dimensionale UMF des $\mathbb{R}^l$ mit Rand*. Die *Orientierbarkeit von M* bedeutet per Definition, dass eine Orientierung von M existiert.

Es gilt folgende Charakterisierung der Orientierbarkeit:

Satz 1.2.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand. Dann ist M genau dann orientierbar, wenn ein Atlas $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i$, $i \in I$, von M existiert, sodass für alle $i, j \in I$ mit $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$ die Bedingung

$$(3) \quad \det \left((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1})'(u) \right) > 0 \quad \text{für alle } u \in \tilde{\phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$$

erfüllt ist.

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Im Falle von Hyperflächen:

Satz 1.2.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^{l+1}$ eine glatte l -dimensionale UMF mit Rand (also eine sogenannte Hyperfläche). Dann ist M genau dann orientierbar, wenn auf M ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld existiert, also eine stetige Abbildung $\mathbf{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ mit $\mathbf{n}(x) \in N_x M$ und $|\mathbf{n}(x)| = 1$ für alle $x \in M$.

Beweis. $\Rightarrow$: Sei M orientiert, sei $x \in M$ und wähle eine positiv orientierte Karte

$$(x_1, \dots, x_l) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

mit $x \in \tilde{U}$. Wir setzen

$$\mathbf{n}(x) := \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_l}(x)}{\left| \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_l}(x) \right|}.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_j}(x) \in T_x M$ folgt $\mathbf{n}(x) \in N_x M$ aus den Eigenschaften des Kreuzprodukts. Um zu zeigen, dass $\mathbf{n}(x)$ wohldefiniert ist (also nicht von der Wahl der positiv orientierten Karte abhängt), stellt man nur fest, dass für linear unabhängige Vektoren $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}^{l+1}$ und linear unabhängige Vektoren $b_1, \dots, b_l \in \mathbb{R}^{l+1}$ die den gleichen Unterraum aufspannen, die Gleichheit

$$\frac{a_1 \times \dots \times a_l}{|a_1 \times \dots \times a_l|} = \frac{b_1 \times \dots \times b_l}{|b_1 \times \dots \times b_l|}$$

äquivalent ist zur Aussage

$$(a_1, \dots, a_l) \text{ und } (b_1, \dots, b_l) \text{ sind gleichorientiert.}$$

A posteriori ist $x \mapsto \mathbf{n}(x)$ glatt, weil es die Abbildungen $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}(x)$ sind.

$\Leftarrow$: Wir definieren

$$(v_1, \dots, v_l) \in \mathcal{O}_{T_x M} : \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_l, \mathbf{n}(x)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^l}, \quad x \in M.$$

Dies ist eine Orientierung auf M : Sei

$$(x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

eine Karte mit $x \in \tilde{U}$ und $\tilde{U}$ zusammenhängend. Dann ändert aus Stetigkeitsgründen für alle $y \in \tilde{U}$ die Determinante der Matrix

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(y), \mathbf{n}(y) \right)$$

ihr Vorzeichen nicht. Ist dieses Vorzeichen positiv, so haben wir eine positiv orientierte Karte gefunden. Im anderen Falle erhalten wir so eine Karte durch

$$(-x_1, x_2, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V},$$

und der Beweis ist fertig. ■

Beispiel 1.2.4. 1. Die glatte UMF $\mathbb{S}^l \subset \mathbb{R}^{l+1}$ ist orientierbar, denn durch

$$\mathbf{n} : M \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad \mathbf{n}(x) := x/|x|$$

ist ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld definiert.

2. Das Möbiusband ist nicht orientierbar (Übung).

3. Ist $M \subset \mathbb{R}^{l+1}$ eine glatte Hyperflaeche, welche als $M = F^{-1}(c)$ gegeben ist, mit F glatt von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^{l+1}$ nach $\mathbb{R}$, so ist M orientierbar, denn

$$\mathbf{n} : M \longrightarrow \mathbb{R}^{l+1}, \quad \mathbf{n}(x) := \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$$

ist ein glattes Einheitsnormalenvektorfeld.

1.3. Glatte k -Formen auf Untermannigfaltigkeiten. Sei im Folgenden V ein reeller Vektorraum der Dimension m .

Definition 1.3.1. Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine k -Form auf V , ist eine multi-lineare und alternierende Abbildung

$$\omega : V^k := \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ mal}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

d.h.

- für alle fixierten $v_1, \dots, v_k$ und alle $i = 1, \dots, k$ ist die induzierte Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w \longmapsto \omega(v_1, \dots, w, \dots, v_k),$$

die w auf den i -ten Slot schickt, linear

- für alle $v_1, \dots, v_k$ und alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

D.h., ω ist linear in jeder einzeln betrachteten Variablen und produziert ein negatives Vorzeichen beim Vertauschen zweier Variablen.

Die Menge aller k -Formen auf V bilden offensichtlich einen reellen Vektorraum, welcher mit $\wedge^k V^*$ bezeichnet wird. Für $k = 0$ setzt man $\wedge^0 V^* := \mathbb{R}$.

Beispiel 1.3.2. 1. Es gilt $\wedge^1 V^* = V^*$. Insbesondere ist

$$\dim(\wedge^1 V^*) = m.$$

2. Ist $k > m$ und $\omega \in \wedge^k V^*$ so folgt $\omega = 0$, denn wegen der Alternierungseigenschaft ist verschwindet $\omega(v_1, \dots, v_k)$, wenn mindestens zwei der v_i gleich sind. Ist $k > m$ so lässt sich mindestens einer dieser Vektor als Linearkombination der anderen schreiben, somit wird $\omega(v_1, \dots, v_k)$ die Linearkombination von Termen die mindestens zwei gleiche Argumente enthalten.

3. Man kann die Determinante von quadratischen Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ als Abbildung

$$\det : (\mathbb{R}^m)^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

betrachtet (jeder Matrizen wird als Kollektion von Spaltenvektoren betrachtet). Dann ist $\det$ die eindeutig bestimmte m -Form auf $\mathbb{R}^m$ mit

$$\det(e_1, \dots, e_m) = 1.$$

Für jedes $\omega \in \wedge^m(\mathbb{R}^m)^*$ gilt $\omega = \omega(e_1, \dots, e_m)\det$, d.h. ω ist ein skalares Vielfaches von $\det$. Insbesondere ist

$$\dim(\wedge^m(\mathbb{R}^m)^*) = 1.$$

Es bezeichne für $k \in \mathbb{N}$ das Symbol S_k die Gruppe aller Permutationen von $\{1, \dots, k\}$, also die Menge aller Bijektionen

$$\tau : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, k\}$$

Mit der Hintereinanderausführung als Gruppenoperation. Die Signatur einer Permutation $\tau \in S_k$ ist definiert als

$$\text{sign}(\tau) := (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \tau} \in \{1, -1\}.$$

Man unterscheidet in diesem Sinne gerade Permutation (Signatur 1) und ungerade Permutationen (Signatur -1). Z.B. ist die Anzahl der Fehlstände der Permutation $\tau \in S_4$, die

$$1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 4$$

abbildet, die Zahl 2, und somit ist dies eine gerade Permutation.

Definition 1.3.3. Seien $r, s \in \mathbb{N}$. Dann ist das *Dachprodukt* definiert als

$$\begin{aligned} \wedge^r V^* \times \wedge^s V^* &\longrightarrow \wedge^{r+s} V^*, \\ (\omega, \eta) &\longmapsto (\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{r+s}) \\ &:= \frac{1}{r!} \frac{1}{s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) \cdot \eta(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+s)}). \end{aligned}$$

Man erinnere sich daran, dass S_k genau $k!$ Elemente besitzt, was letztlich der Grund für die normierenden Faktoren $\frac{1}{r!} \frac{1}{s!}$ in obiger Definition ist. Es offensichtlich, dass $\omega \wedge \eta$ multi-linear ist. Die Alternierungseigenschaft ist etwas komplizierter und wird in der Übung bewiesen.

Wir bemerken die folgenden Spezialfälle:

a) Für alle $\omega \in \wedge^0 V^* = \mathbb{R}$ und $\eta \in \wedge^s V^*$ hat man $\omega \wedge \eta = \omega \cdot \eta$, also Multiplikation mit dem Skalar ω .

b) Für alle $\omega, \eta \in \wedge^1 V^*$ gilt

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1).$$

c) Für alle $\omega \in \wedge^r V^*, \eta \in \wedge^1 V^*$ gilt

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} \omega(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{r+1}) \cdot \eta(v_i),$$

mit $(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{r+1})$ dem r -Tupel, welches aus dem $(r+1)$ -Tupel $(v_1, \dots, v_{r+1})$ durch das Streichen des i -ten Elements v_i entsteht.

Lemma 1.3.4. Das Dachprodukt ist bilinear, distributiv, assoziativ, und antikommutativ in dem Sinne das

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \eta \quad \text{für alle } \omega \in \wedge^r V^*, \eta \in \wedge^s V^*.$$

Beweis. Die Bilinearität und Distributivität sind einfach einzusehen. Die Assoziativität und Antikommutativität sind Übungsaufgaben. ■

Bemerkung 1.3.5. Definiert man¹

$$\wedge V^* := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k V^*,$$

¹Tatsächlich folgt aus dem unten zu findenden Lemma 1.3.7, dass dies eine endliche direkte Summe ist.

so besagt das obige Lemma, dass dieser reelle Vektorraum zusammen mit dem Dachprodukt eine (mild) nicht-kommutative Algebra mit Einselement $1 \in \mathbb{R} = \wedge^0 V^*$ wird.

Wegen der Assoziativität des Dachproduktes sind Ausdrücke der Art $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$ wohldefiniert. Für Aufgrund der Antikommutativität des Dachprodukts gilt für Linearformen

$$\phi_1, \dots, \phi_k \in V^* = \wedge^1 V^*$$

die Identität $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k = 0$ genau dann, wenn mindestens zwei dieser Linearformen gleich sind. Weiterin gilt

$$\phi_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \phi_{\tau(k)} = \text{sign}(\tau) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k \quad \text{für alle } \phi_1, \dots, \phi_k \in V^*, \tau \in S_r.$$

Aus dieser Formel, der obigen Eigenschaft c) des Dachprodukts, und dem Entwicklungssatz für Determinanten folgt unmittelbar:

Lemma 1.3.6. *Für alle $\phi_1, \dots, \phi_k \in V^*$, $v_1, \dots, v_k \in V$, gilt*

$$(4) \quad (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \left((\phi_i(v_j))_{i,j=1,\dots,m} \right).$$

Für eine Basis $w_1, \dots, w_m \in V$ von V bezeichne $w_1^*, \dots, w_m^* \in V^*$ die dazu duale Basis, also mit dem Kronecker-Delta-Symbol:

$$w_i^*(w_j) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Satz 1.3.7. *Ist $k > m$ so ist $\dim(\wedge^k V^*) = 0$. Ist $k \leq m$ und ist Basis $w_1, \dots, w_m \in V$ von V , so bildet die Kollektion von k -Formen $w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^*$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, eine Basis von $\wedge^k V^*$, insbesondere ist $\dim(\wedge^k V^*) = \text{Binom}(m; k)$.*

Beweis. Ist $k > m$, so folgt die Behauptung aus Beispiel 5.

Für $k \leq m$ und k -viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ gilt

$$w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^* = 0, \quad \text{falls mindestens zwei Indizes gleich sind.}$$

Sind alle Indizes paarweise verschieden, so folgt aus Lemma 1.3.6 für alle $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, m\}$ die Identität

$$w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^*(w_{j_1}, \dots, w_{j_k}) = \text{sign}(\tau),$$

falls $(j_1, \dots, j_k) = \tau(i_1, \dots, i_k)$ für eine Permutation $\tau \in S_k$, und

$$w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^*(w_{j_1}, \dots, w_{j_k}) = 0$$

sonst. Insbesondere gilt also für alle wachsend geordneten $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ und $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m$ die Identität

$$(5) \quad w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^*(w_{j_1}, \dots, w_{j_k}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (j_1, \dots, j_k) = (i_1, \dots, i_k) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit sieht man, dass $w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^*$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$, linear unabhängig sind: Aus

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \lambda_{i_1, \dots, i_k} w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^* = 0$$

folgen für alle $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m$ die Identitäten

$$\lambda_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq m} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \lambda_{i_1, \dots, i_k} w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^* (w_{j_1}, \dots, w_{j_k}) = 0.$$

Außerdem lässt sich jedes $\omega \in \wedge^k V^*$ schreiben als

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m} \omega(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}) w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^*,$$

also erzeugen die obigen Vektoren auch $\wedge^k V^*$. Die letzte Identität muss nur auf der Basis überprüft werden, wo sie wegen (5) offensichtlich ist. ■

Definition 1.3.8. Sei W ein weiterer endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $T : V \rightarrow W$ lineare Abbildung. Dann heißt

$$T^* : \wedge^k W^* \longrightarrow \wedge^k V^*, \quad T^* \omega(v_1, \dots, v_k) := \omega(Tv_1, \dots, Tv_k)$$

die durch T induzierte *Pullback-Abbildung auf k -Formen*.

Es gelten folgende offensichtliche Rechenregeln:

$$(6) \quad T^*(\omega \wedge \eta) = (T^* \omega) \wedge (T^* \eta),$$

$$(7) \quad (TS)^* = S^* T^*.$$

Es sei daran erinnert, dass $\det(T) \in \mathbb{R}$ für eine lineare Abbildung $T : V \rightarrow V$ definiert ist als $\det(A)$, wobei A die Darstellungsmatrix für eine Basis von V ist. Diese Zahl hängt nicht von der Wahl einer Basis ab, da Determinanten invariant unter Konjugation mit invertierbaren Matrizen ist.

Satz 1.3.9. Für jede lineare Abbildung $T : V \rightarrow V$ und $\omega \in \wedge^m V^*$ gilt $T^* \omega = \det(T) \omega$.

Beweis. Sei $w_1, \dots, w_m$ eine Basis von V und $(t_{ij})_{i,j=1, \dots, m}$ die induzierte Darstellungsmatrix von T , also $Tw_j = \sum_{i=1}^m t_{ij} w_i$. Es folgt

$$w_i^*(Tw_j) = \sum_{k=1}^m t_{kj} \delta_{ik} = t_{ij},$$

also

$$\begin{aligned} T^*(w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^*)(w_1, \dots, w_n) &= w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^*(Tw_1, \dots, Tw_n) \\ &= \det(T) \\ &= \det(T) w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^*(w_1, \dots, w_n) \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Identität Lemma 1.3.6 benutzt haben. Da für jedes $\omega \in \wedge^m V^*$ die Formel

$$\omega = \omega(w_1, \dots, w_n) w_1^* \wedge \cdots \wedge w_n^*,$$

gilt, folgt hieraus sofort die Behauptung. ■

Sei von nun an $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte UMF mit Rand der Dimension m . Für $x \in M$ heißt der m -dimensionale reelle Vektorraum

$$T_x^*M := (T_x M)^*$$

der *Kotangentenraum* von M in x .

Definition 1.3.10. Eine Familie von k -Formen $\omega(x) \in \wedge^k T_x^*M$, $x \in M$, heißt eine *glatte k -Form auf M* , falls für alle glatten Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \omega(x)(X_1(x), \dots, X_k(x))$$

glatt, also in $C^\infty(M)$ ist. Die Menge der glatten k -Formen auf M wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet. Man setzt $\Omega^0(M) := C^\infty(M)$.

Offensichtlich lässt sich jede glatte k -Form ω auf M auf eine offene Teilmenge U von M einschränken; das Ergebnis ist eine glatte k -Form auf U , welche mit $\omega|_U$ bezeichnet wird.

Beispiel 1.3.11. Ist $f \in C^\infty(M)$, so ist das Differential df eine 1-Form auf M , also $df \in \Omega^1(M)$. Dies folgt aus der Darstellung

$$df(x) = X[f](x),$$

welches nach Übungsblatt 2 eine glatt von x abhängende Funktion ist.

Bemerkung 1.3.12. 1. Man definiert die Addition zweier glatter k -Formen punktweise macht so $\Omega^k(M)$ zu einem reellen Vektorraum.

2. Man definiert für $\omega \in \Omega^r(M)$ und $\sigma \in \Omega^s(M)$ ihr Dachprodukt punktweise durch

$$(\omega \wedge \sigma)(x) := \omega(x) \wedge \sigma(x)$$

Damit erhält man eine $C^\infty(M)$ -bilineare, assoziative, distributive, antikommutative Abbildung

$$\wedge : \Omega^r(M) \times \Omega^s(M) \longrightarrow \Omega^{r+s}(M)$$

und

$$\Omega(M) := \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(M)$$

wird eine Algebra mit Einselement der konstanten Funktion $x \mapsto 1$ auf M .

3. Ist $(x_1, \dots, x_m, \tilde{U})$ eine Karte auf M , so bilden die glatten 1-Formen $dx_1, \dots, dx_m \in \Omega^1(\tilde{U})$ die zu $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \in \mathfrak{X}(\tilde{U})$ duale Basis. Für alle $\omega \in \Omega^k(\tilde{U})$ (z.B. die Einschränkung einer glatten k -Form auf M auf $\tilde{U}$) gilt folgende lokale Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

mit den eindeutig bestimmten glatten Funktionen

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) \in C^\infty(\tilde{U}).$$

Wir werden hierfür kurz

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I$$

schreiben.

Definition 1.3.13. 1. Ist $M' \subset \mathbb{R}^{l'}$ eine glatte UMF mit Rand der Dimension m' , und $f \in C^\infty(M, M')$, so erhält man eine lineare Abbildung

$$f^* : \Omega^k(M') \longrightarrow \Omega^k(M)$$

den von f induzierten Pullback, via

$$(f^*\omega)(x) := df(x)^*\omega(f(x)).$$

2. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$, $k \geq 1$, so wird die lineare Abbildung

$$\iota_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M), \quad (\iota_X \omega)(x)(v_1, \dots, v_{k-1}) := \omega(x)(X(x), v_1, \dots, v_{k-1}),$$

wobei $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_x M$, die Kontraktion mit X genannt.

Bemerkung 1.3.14. Ist $U \subset M$ offen, $\omega \in \Omega^k(M)$, und $i_U : U \subset M$ die Inklusion, so ist $i_U^* \omega = \omega|_U$.

Es gelten folgende Rechenregeln für diese Operationen:

Lemma 1.3.15. a) Man hat

$$\iota_{fX} \omega = f \iota_X \omega \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^k(M), X \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M).$$

b) Man hat

$$\iota_X(\omega \wedge \sigma) = (\iota_X \omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge (\iota_X \sigma) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^r(M), X \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in \Omega^s(M).$$

c) Sei $M' \subset \mathbb{R}^{l'}$ eine glatte m' -dimensionale UMF mit Rand. Sei $f \in C^\infty(M, M')$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M')$ mit $Y[f] = df \circ X$. Dann gilt

$$f^*(\iota_Y \omega) = \iota_X(f^* \omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^k(M').$$

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Unser nächstes Ziel ist, das Differential von Funktionen auf Differentialformen zu verallgemeinern. Hierzu sei daran erinnert, dass für $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ die Funktion $X[f] \in C^\infty(M)$ in den Übungen durch

$$X[f] := df(X)$$

definiert worden ist. Völlig analog definiert man für $Y \in C^\infty(M, \mathbb{R}^l)$ die Funktion $X[Y] \in C^\infty(M, \mathbb{R}^l)$, indem man das Differential komponentenweise wirken lässt. Insbesondere gelten folgende Rechenregeln

$$(8) \quad (X + Y)[f] = X[f] + Y[f], \quad X[f + g] = X[f] + X[g]$$

$$(9) \quad (f \cdot X)[g] = f \cdot X[g]$$

$$(10) \quad X[f \cdot Y] = f \cdot X[Y] + X[f] \cdot Y$$

Definition 1.3.16. Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist der *Kommutator* $[X, Y] \in C^\infty(M, \mathbb{R}^l)$ definiert durch

$$[X, Y](x) := X[Y](x) - Y[X](x).$$

Satz 1.3.17. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und sei $(\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m), \tilde{U})$ eine Karte mit den lokalen Darstellungen

$$X|_{\tilde{U}} = \sum_{j=1}^m \zeta_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad Y|_{\tilde{U}} = \sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Dann gilt

$$[X, Y]|_{\tilde{U}} = \sum_{j=1}^m (X[\eta_j] - Y[\zeta_j]) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

insbesondere $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Aus der Produktregel (10) folgt

$$\begin{aligned} [X, Y]|_{\tilde{U}} &= X \left[\sum_{j=1}^m \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] - Y \left[\sum_{j=1}^m \zeta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^m (X[\eta_j] - Y[\zeta_j]) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^m \left(\eta_j X \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \zeta_j Y \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right] \right). \end{aligned}$$

Für den letzten Summanden gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m \left(\eta_j X \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \zeta_j Y \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right] \right) \\ &= \sum_{j,i=1}^m \left(\eta_j \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right] - \zeta_j \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \right] \right) \\ &= \sum_{j,i=1}^m \eta_j \zeta_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Der letzte Kommutator verschwindet wegen

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] &= \frac{\partial}{\partial x_i} [(\partial_j \tilde{\phi}^{-1}) \circ \tilde{\phi}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [(\partial_i \tilde{\phi}^{-1}) \circ \tilde{\phi}] \\ &= (\partial_i \partial_j \tilde{\phi}) \circ \tilde{\phi} - (\partial_j \partial_i \tilde{\phi}) \circ \tilde{\phi} = 0, \end{aligned}$$

aufgrund des Lemmas von Schwarz. ■

Es gelten folgende elementare Eigenschaft des Kommutators:

Satz 1.3.18. Seien $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. Dann gilt:

a) Die Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

ist $\mathbb{R}$ -bilinear und schiefsymmetrisch.

b) Es gilt die Jacobi-Identität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

c) Man hat

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX[g]Y - gY[f]X.$$

d) Es gilt:

$$[X, Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]].$$

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Bemerkung 1.3.19. Ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum V zusammen mit einer schiefsymmetrischen $\mathbb{K}$ -bilinearen Abbildung

$$[\cdot, \cdot]_V : V \times V \longrightarrow V$$

welche die Jacobi-Identität erfüllt, heißt eine *Lie-Algebra*. Die obigen Eigenschaften a) und b) besagen also, dass $\mathfrak{X}(M)$ zusammen mit $[\cdot, \cdot]$ eine Lie-Algebra wird.

Damit können wir folgende Definition geben:

Definition 1.3.20. Das *äußere Differential* ist die lineare Abbildung

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

definiert für $\omega \in \Omega^k(M)$, $X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ durch

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &:= \sum_{j=0}^k (-1)^j X_j[\omega(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k)] \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned}$$

wobei ein Hut auf einem Eintrag bedeutet, dass dieser weggelassen wird.

Bemerkung 1.3.21. 1. Dass $d\omega$ multilinear ist, folgt aus der Linearität von $X[\cdot]$, der Multilinearität von ω und der Bilinearität von $[\cdot, \cdot]$. Dass $d\omega$ alternierend ist, folgt aus der gleichen Eigenschaft von ω und der Schiefsymmetrie von $[\cdot, \cdot]$. Somit ist das äußere Differential als Abbildung wohldefiniert.

2. Für $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ ist das äußere Differential von f gerade das Differential aus Definition 1.1.28.

3. Für $\omega \in \Omega^1(M)$ gilt

$$d\omega(X, Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X, Y]),$$

4. Für $\omega \in \Omega^2(M)$ gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X[\omega(Y, Z)] - Y[\omega(X, Z)] + Z[\omega(X, Y)] \\ &\quad - \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

Satz 1.3.22. 1. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$. Gilt in einer Karte $((x_1, \dots, x_m), \tilde{U})$ die Darstellung

$$\omega|_{\tilde{U}} = \sum_{I=(i_1, \dots, i_k)} \omega_I dx^I,$$

so gilt

$$d\omega|_{\tilde{U}} = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I.$$

2. Es gilt

$$d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge d\sigma \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^r(M), \sigma \in \Omega^s(M).$$

3. Es gilt $d(d\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega^k(M)$. Kurz: $d^2 = 0$

4. Für alle $f \in C^\infty(M, M')$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ gilt

$$d(F^*\omega) = F^*d\omega.$$

Beweis. 1. Es gilt

$$\begin{aligned} d\omega|_{\tilde{U}} &= \sum_{J=(j_0, \dots, j_k)} d\omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) dx^J \\ &\quad \sum_{J=(j_0, \dots, j_k)} \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_{j_\alpha}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) dx^J + \text{Terme mit } \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right], \end{aligned}$$

also durch Vertauschen der Differentiale

$$\begin{aligned} d\omega|_{\tilde{U}} &= \sum_{J=(j_0, \dots, j_k)} \sum_{\alpha=0}^k \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}} [\omega_{J \setminus j_\alpha}] \right) dx_{j_\alpha} \wedge dx^{J \setminus j_\alpha} \\ &= \sum_I \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} [\omega_I] dx_j \right) \wedge dx^I \\ &= \sum_I d\omega_I \wedge dx^I, \end{aligned}$$

wobei $J \setminus j_\alpha$ den Multi-Index der Länge k bezeichnet, der aus J entsteht, wenn man j_α weglässt.

2. Aufgrund der Lokalität der Aussagen und der Linearität des äußeren Differentials können wir OBdA $\omega = f dx^I$ und $\sigma = g dx^J$ annehmen, mit glatten Funktionen f und g auf einem Kartengebiet. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d(fg dx^I \wedge dx^J) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (gdf + fdg) \wedge dx^I \wedge dx^J = df \wedge dx^I \wedge g dx^J + dg \wedge f dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge \sigma + dg \wedge \omega \wedge dx^J = d\omega \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge d\sigma, \end{aligned}$$

wobei wir die $C^\infty(M)$ -Bilinearität von $\wedge$ für die erste Identität, Teil 1) für die zweite Identität, die Produktregel für die dritte Identität, und wieder Teil 1) für die letzte Identität benutzt haben.

3. Sei zunächst $k = 0$ und $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$. Dann gilt für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dann gilt
 $d(df)(X, Y) = X[df(X)] - Y[df(X)] - df([X, Y]) = X[Y[f]] - Y[X[f]] - [X, Y][f] = 0$,
 wegen Teil d) von Satz 1.3.18. Sei nun $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ mit

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I$$

in einer Karte. Dann bekommen wir

$$d(d\omega) = \sum_I d(d\omega_I \wedge dx^I) = \sum_I [d(d\omega_I) \wedge dx^I - d\omega_I \wedge d(dx^I)],$$

wobei wir Teil 1) und Teil 2) benutzt haben. Der erste Summand ist $= 0$ wegen des $k = 0$ Falls. Dass der zweite Summand $= 0$ ist, folgt wegen

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

und Teil 2) ebenfalls aus dem $k = 0$ Fall.

4. Wir führen Induktion über den Grad k von ω . Sei $k = 0$ und $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$. Für alle $x \in M$ gilt

$$(F^*f)(x) = f(F(x)),$$

also für alle $v \in T_x M$,

$$d(F^*f)(x)(v) = d(f \circ F)(x)(v) = (df)(F(x))(dF(x)(v)) = (F^*df)(x)(v),$$

nach der Kettenregel, d.h. $d(F^*f) = F^*df$. Sei nun die Behauptung bewiesen für glatte k -Formen und $\omega \in \Omega^{k+1}(N)$. Sei erneut OBdA $\omega = f dx^J$, wobei $J = (j_0, \dots, j_k)$. Sei $I := (j_0, \dots, j_{k-1})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d(F^*(f dx^J)) \\ &= d\left(F^*\left[(f dx^{j_0} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-1}}) \wedge dx^{j_k}\right]\right) \\ &= d\left(F^*(f dx^I) \wedge F^*dx^{j_k}\right) \\ &= d(F^*(f dx^I)) \wedge F^*dx^{j_k} + (-1)^k F^*(f dx^I) \wedge d(F^*dx^{j_k}) \\ &= F^*(d(f dx^I)) \wedge F^*dx^{j_k} + (-1)^k F^*(f dx^I) \wedge F^*(d dx^{j_k}) \\ &= F^*(d(f dx^I) \wedge dx^{j_k}) \\ &= F^*(d(f dx^I \wedge dx^{j_k})) \\ &= F^*(d\omega), \end{aligned}$$

wobei wir (6) für die dritte, Teil 2) für die vierte, die Induktionsvoraussetzung für die fünfte, Teil 3) und (6) für die sechste, und Teil 2) für die siebte Identität benutzt haben. ■

Bemerkung 1.3.23. Die Folge von linearen Abbildungen

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots, \xrightarrow{d} \Omega^m(M)$$

wird der *de-Rham Kokomplex von M* genannt (bitte schlagen Sie nach, was ein Komplex/Kokomplex ist). Wegen $d^2 = 0$, ist dies tatsächlich ein Kokomplex: Man hat

$$\text{Bild}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)) \subset \text{Ker}(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$$

und der Faktorvektorraum

$$H_{\text{dR}}^k(M) := \frac{\text{Ker}(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{\text{Bild}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))}, \quad k = 1, \dots, m.$$

heißt *k -te deRham Komologiegruppe von M* - ein zentrales Objekt der algebraischen Topologie. Formen in

$$\text{Bild}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))$$

nennt man *exakte (glatte) k -Formen*, und Formen in

$$\text{Ker}(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$$

nennt man *geschlossene (glatte) k -Formen*. Einige lose Bemerkungen, die die Wichtigkeit dieser Daten unterstreichen sollen:

- Für jede *kompakte* glatte UMF M gilt $\dim H_{\text{dR}}^k(M) < \infty$ für alle $k = 1, \dots, m$.
- Zwei kompakte, orientierbare, zusammenhängende glatte zweidimensionale UMFen M_1 und M_2 sind genau dann diffeomorph, wenn ihre sogenannten Euler-Charakteristiken übereinstimmen, also $\chi(M_1) = \chi(M_2)$. Hier ist für eine glatte kompakte m -dimensionale UMF M die Zahl $\chi(M)$ definiert als

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^m (-1)^k \dim H_{\text{dR}}^k(M).$$

- Auf einer kompakten glatten UMF M existiert genau dann ein $X \in \mathfrak{X}(M)$ ohne Nullstellen, wenn $\chi(M) = 0$.
- Ist M eine sternförmige und offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$, so gilt $H_{\text{dR}}^k(M) = 0$ für alle $k = 1, \dots, m$. Der Grund dahinter ist das *Lemma von Poincare*, welches besagt dass auf solchen M 's jede geschlossene glatte k -Form mit $k \geq 1$ exakt ist.

Wir schließen diesen Abschnitt noch mit der Charakterisierung der Orientierbarkeit mittels glatter m -Formen. Hierzu und (an vielen anderen Stellen in der Differentialgeometrie) benötigt man sogenannte Teilungen der Eins:

Satz 1.3.24. *Sei*

$$\phi_j : \tilde{U}_j \longrightarrow \tilde{V}_j, \quad j \in J,$$

eine abzählbarer Atlas von M , der lokal endlich ist, d.h. für jede kompakte Menge $W \subset M$ gilt

$$\#\{j \in J : \tilde{U}_j \cap W \neq \emptyset\} < \infty.$$

Dann existiert eine Familie von glatten Funktionen $f_j : M \rightarrow [0, 1]$, $j \in J$, mit folgenden Eigenschaften:

- für alle $j \in J$ gilt für

$$\text{supp}(f_j) := \overline{\{x \in M : f_j(x) \neq 0\}},$$

dem sogenannten Träger von f_j , dass $\text{supp}(f_j)$ eine kompakte Teilmenge von $\tilde{U}_j$ ist.

- Man hat

$$\sum_{j \in J} f_j(x) = 1,$$

was nach der vorherigen Eigenschaft eine lokal endliche Summe ist. Eine Familie $(f_j)_{j \in J}$ wie oben heißt eine der offenen Überdeckung $(\tilde{U}_j)_{j \in J}$ untergeordnete Teilung der Eins.

Beweis. Behauptung: Ist $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine Karte, so existiert eine glatte Funktion $f : M \rightarrow [0, \infty)$ mit $f = 1$ auf einer offenen Teilmenge von $\tilde{U}$ und $\text{supp}(f) \subset \tilde{U}$ kompakt.

Beweis der Behauptung: Die Funktion

$$q : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad q(r) := \begin{cases} e^{-1/r}, & r > 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases}$$

ist glatt mit $q(r) > 0$ genau dann wenn $r > 0$. OBdA existiere ein $p \in \tilde{U}$ mit $\phi(p) = 0$. Wähle $0 < a < b$ mit $\overline{B_b(0)} \subset \tilde{V}$ (wobei der offene Ball im Falle einer Karte vom Typ ii) in der Teilraumtopologie der Halbebene zu verstehen ist) und setze

$$0 \leq f(x) := \begin{cases} \frac{q(b-|\phi(x)|)}{q(b-|\phi(x)|) + q(|\phi(x)|-a)}, & x \in \tilde{U} \\ 0, & x \in M \setminus \tilde{U}. \end{cases}$$

Dies ist eine glatte Funktion auf M mit

$$\text{supp}(f_j) = \tilde{\phi}^{-1}(\overline{B_b(0)}) \subset \tilde{U}$$

Die Funktion ist $= 1$ auf

$$\tilde{\phi}^{-1}(B_a(0)) \subset \tilde{U},$$

was die Behauptung beweist.

Wählen wir nun zu jedem $\tilde{\phi}_j$ eine zugehörige Funktion $h_j : M \rightarrow [0, \infty)$ wie in der Behauptung setzen wir

$$f_j := \frac{h_j}{\sum_{l \in J} h_l} \geq 0$$

so ist diese Funktion glatt auf M , da die Summe lokal endlich ist. Außerdem gilt $\text{supp}(f_j) = \text{supp}(h_j)$ und

$$\sum_{j \in J} f_j = \frac{\sum_{j \in J} h_j}{\sum_{l \in J} h_l} = 1,$$

was den Beweis vervollständigt. ■

Teilungen der Eins erlauben es also, Konzepte die auf offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{R}_+^m$ bekannt sind, durch zusammenkleben auf M zu übertragen.

Satz 1.3.25. *M ist genau dann orientierbar, wenn ein $\omega \in \Omega^m(M)$ existiert mit $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Jede solche Form wird eine glatte Volumenform auf M genannt. Sind ω_1 und ω_2 zwei Volumenformen auf M , so existiert ein $f \in C^\infty(M)$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in M$ und $\omega_2 = f\omega_1$.*

Beweis. Die letzte Behauptung sieht man wie folgt: Wegen $\dim \Lambda^m(T_x^*M) = 1$ ist $\omega_1(x) \in \Lambda^m(T_x^*M)$ eine Basis für alle fixierten $x \in M$. Es folgt $\omega_2(x) = f(x)\omega_1(x)$ für ein eindeutig bestimmtes $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dass $x \mapsto f(x)$ glatt ist, folgt aus

$$f = \frac{\omega_2(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m})}{\omega_1(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m})}.$$

in jeder Karte nahe x . Zur Äquivalenz:

$\Rightarrow$: Man wähle² einen abzählbaren und lokal endlichen Atlas

$$\tilde{\phi}_j = (x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}) : \tilde{U}_j \longrightarrow \tilde{V}_j, \quad j \in J.$$

Sei $(f_j)_{j \in J}$ eine diesem Atlas untergeordnete Teilung der Eins. Auf jedem $\tilde{U}_j$ ist

$$\omega_j := dx_1^{(j)} \wedge \dots \wedge dx_m^{(j)} \in \Omega^m(\tilde{U}_j)$$

eine Volumenform (als punktweise Basis von $\Lambda^m(T_x^*\tilde{U}_j)$). Wir setzen

$$\omega := \sum_{j \in J} f_j \omega_j \in \Omega^m(M),$$

wobei wir uns implizit die in $\tilde{U}_j$ kompakt getragene und glatte m -Form $f_j \omega_j$ durch 0 auf M fortgesetzt vorstellen. Die obige Summe ist lokal endlich und produziert so in der Tat ein Element aus $\Omega^m(M)$. Noch z.z.: $\omega(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Sei OBdA $x \in \tilde{U}_1$. Wegen Satz 1.3.9 und der Tatsache, dass die Übergangsmatrix des Basiswechsels von der kanonischen Basis von $\tilde{\phi}_j$ zur kanonischen Basis von $\tilde{\phi}_1$ gerade durch $(\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_1^{-1})' \circ \phi_1$ gegeben ist (Übungsaufgabe), folgt die Formel

$$\begin{aligned} & \omega_j(\partial_{x_1^{(1)}}, \dots, \partial_{x_m^{(1)}}) \\ &= \det((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_1^{-1})' \circ \phi_1) (dx_1^{(1)} \wedge \dots \wedge dx_m^{(1)}) (\partial_{x_1^{(1)}}, \dots, \partial_{x_m^{(1)}}) \\ &= \det((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_1^{-1})' \circ \phi_1), \end{aligned}$$

auf $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_j$, falls dieser Schnitt nichtleer ist. Wähle nun eine offene Umgebung $U(x) \subset \tilde{U}_1$ von x mit kompaktem Abschluss; dann ist mit $n(x)$ der Anzahl aller j mit $U(x) \cap \text{supp}(f_j)$ die Bedingung $n(x) < \infty$ erfüllt. Es gilt $n(x) > 0$, da sich die $f_j(x)$ sonst nicht zu 1

²Abstrakte topologische Eigenschaften (Parakompaktheit, Lokalkompaktheit, Separabilität) von UMFen mit Rand erlauben es, aus jedem Atlas so einen Teilatlas auszuwählen. Im Falle, dass M kompakt ist, kann man natürlich einfach einen endlichen Teilatlas wählen.

aufsummieren würden. Damit folgt

$$\omega(x)(\partial_{x_1^{(1)}}(x), \dots, \partial_{x_m^{(1)}}(x)) = \sum_{j=1}^{n(x)} f_j(x) \det((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_1^{-1})' \phi_1(x)) > 0,$$

wobei die Summe lokal endlich ist.

$\Leftarrow$: Auf jeder zusammenhängenden Karte

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

existiert eine nirgends verschwindende Funktion $\psi \in C^\infty(\tilde{U})$ mit

$$\omega|_{\tilde{U}} = \psi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m.$$

Es folgt

$$\omega(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}) = \psi \neq 0.$$

Die Funktion ψ kann ihr Vorzeichen nicht wechseln und wir können $\psi > 0$ annehmen (sonst ersetze z.B. x_1 durch $-x_1$).

Sei nun

$$\tilde{\phi}_j = (x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}) : \tilde{U}_j \longrightarrow \tilde{V}_j, \quad j \in \mathbb{N},$$

ein abzählbarer Atlas aus solchen Karten, mit den entsprechenden Funktionen $\psi_j > 0$. Auf einem nichtleeren Schnitt $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ gilt

$$\omega = \psi_i dx_1^{(i)} \wedge \dots \wedge dx_m^{(i)} = \psi_j dx_1^{(j)} \wedge \dots \wedge dx_m^{(j)},$$

also

$$0 < \psi_j = \omega(\partial_{x_1^{(j)}}, \dots, \partial_{x_m^{(j)}}) = \det((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1})' \circ \phi_i) \omega(\partial_{x_1^{(i)}}, \dots, \partial_{x_m^{(i)}}) = \det((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1})' \circ \phi_i) \psi_i.$$

Es folgt $\det((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1})' \circ \phi_i) > 0$, so dass der so konstruierte Atlas M orientierbar macht. ■

1.4. Integration von glatten m -Formen auf orientierten UMFen. Sei in diesem Abschnitt erneut $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte und *orientierte* m -dimensionale UMF mit Rand.

Analog zu Funktionen, ist der *Träger* einer glatten k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ definiert als

$$\text{supp}(\omega) := \overline{\{x \in M : \omega(x) \neq 0\}}.$$

Wir bezeichnen mit

$$\Omega_c^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{supp}(\omega) \subset M \text{ ist kompakt}\}$$

den linearen Raum aller glatten und kompakt getragenen k -Formen auf M , und $\Omega_+^m(M)$ den linearen Raum aller nichtnegativen glatten m -Formen auf M , d.h. alle $\omega \in \Omega^m(M)$ mit $\omega(v_1, \dots, v_m) \geq 0$ für alle $x \in M$, and alle positiv orientierten Basen $(v_1, \dots, v_m) \in T_x M$.

Bemerkung 1.4.1. Anhand der Definition des äußeren Differentials ist es leicht zu sehen, dass das Differential einer kompakt getragenen k -Form ebenfalls kompakt getragen ist. Grundsätzlich sind alle linearen Differentialoperatoren in diesem Sinne *lokal*.

Unser Ziel ist es, das Integral von glatten m -Formen mit kompaktem Träger bzw. nichtnegativen glatten m -Formen zu definieren.

Sei im Folgenden λ_m das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^m$. Wir betrachten es als definiert auf der Borelschen Sigma-Algebra (Elemente einer Borel Sigma-Algebra nennen wir im Folgenden Borelmengen). Ist $A \subset M$ eine Borelmenge und $\tilde{\phi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ eine Karte, so ist $\tilde{\phi}(A \cap \tilde{U}) \subset \mathbb{R}^m$ eine Borelmenge, denn Bilder von Borelmengen unter Homöomorphismen sind Ebenfalls Borelmengen.

Ist $\omega \in \Omega^m(M)$ und ist

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

eine Karte, so lässt sich $\omega|_{\tilde{U}}$ schreiben als

$$\omega|_{\tilde{U}} = \omega_{\tilde{\phi}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m,$$

mit einer eindeutig bestimmten glatten Funktion $\omega_{\tilde{\phi}} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist ω nichtnegativ, so gilt dies auch für $\omega_{\tilde{\phi}}$, wegen

$$\omega_{\tilde{\phi}} = \omega(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}).$$

Satz 1.4.2. *Für jede Borelmenge $A \subset M$ existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$\Omega_c^m(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto \int_A \omega,$$

so dass für alle positiv orientierten Karten

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

und alle $\omega \in \Omega_c^m(M)$ mit $\text{supp}(\omega) \subset \tilde{U}$ kompakt, gilt

$$\int_A \omega = \int_{\tilde{\phi}(A \cap \tilde{U})} \omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda_m.$$

Es kann in obiger Aussage überall $\Omega_c^m(M)$ durch $\Omega_+^m(M)$ ersetzt werden und liefert dann eine lineare Abbildung

$$\Omega_+^m(M) \longrightarrow [0, \infty], \quad \omega \longmapsto \int_A \omega,$$

Beweis. Eindeutigkeit: Ist

$$\Omega_c^m(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto \hat{\int}_A \omega,$$

eine weitere solche lineare Abbildung, so wähle man einen abzählbaren, lokal endlichen, positiv orientierten Atlas

$$\tilde{\phi}_j = (x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}) : \tilde{U}_j \longrightarrow \tilde{V}_j, \quad j \in J.$$

Sei $(f_j)_{j \in J}$ eine untergeordnete Teilung der Eins (insbesondere ist f_j kompakt getragen in $\tilde{U}_j$). Setze

$$l := \#\{j \in J : \tilde{U}_j \cap \text{supp}(\omega)\} < \infty.$$

Dann gilt

$$\int_A \omega = \int_A \sum_{j=1}^l f_j \omega = \sum_{j=1}^l \int_A f_j \omega = \sum_{j=1}^l \int_{\tilde{\phi}_j(A \cap \tilde{U}_j)} \omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda_m = \sum_{j=1}^l \hat{\int}_A f_j \omega = \hat{\int}_A \omega.$$

Existenz: Wir definieren zunächst $\int_A \omega$ für den Fall, dass der Träger in einer positiv orientierten Karte kompakt enthalten ist. Ist

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V},$$

so eine Karte, so definieren wir natürlich

$$\int_A \omega = \int_{\tilde{\phi}(A \cap \tilde{U})} \omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda_m.$$

Diese Konstruktion ist wohldefiniert: Ist

$$\tilde{\psi} = (y_1, \dots, y_m) : \tilde{W} \longrightarrow \tilde{X},$$

eine weitere positiv orientierte Karte mit $\text{supp}(\omega) \subset \tilde{W}$, so gilt mit dem Kartenwechsel $T := \tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ die Formel

$$\omega_{\tilde{\phi}} = \omega(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}) = \det(T' \circ \tilde{\phi}) \omega_{\tilde{\psi}},$$

und da beide Karten positiv orientiert sind,

$$\omega_{\tilde{\phi}} = |\det(T' \circ \tilde{\phi})| \omega_{\tilde{\psi}},$$

und somit

$$\omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} = |\det(T' \circ \tilde{\phi})| \omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ T,$$

und mit der Transformationsformel für Lebesgue Integrale

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\psi}(A \cap \tilde{W}) = T(\tilde{\phi}(A \cap \tilde{U}))} \omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} d\lambda_m &= \int_{\tilde{\phi}(A \cap \tilde{U})} \omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ T |\det(T' \circ \tilde{\phi})| d\lambda_m \\ &= \int_{\tilde{\phi}(A \cap \tilde{U})} \omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda_m. \end{aligned}$$

Ist der Träger nicht notwendig in einer Karte enthalten, so nehmen wir einen Atlas und eine zugehörige Teilung der Eins und setzen

$$\int_A \omega := \sum_{j \in J} \int_A f_j \omega.$$

Diese Konstruktion hängt nicht von der Wahl dieser beiden Daten ab: Sei

$$\tilde{\psi}_i : \tilde{W}_i \longrightarrow \tilde{X}_i, \quad i \in I,$$

ein weiteres Atlas wie oben mit zugehöriger Teilung der Eins $(g_i)_{i \in I}$. Es ist $f_j = \sum_i f_j \cdot g_i$ und $g_i = \sum_j g_i \cdot f_j$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_j \int_A f_j \omega &= \sum_j \sum_i \int_A (f_j \cdot g_i) \omega = \sum_i \sum_j \int_A (f_j \cdot g_i) \omega \\ &= \sum_i \int_A \sum_j (f_j \cdot g_i) \omega = \sum_i \int_A g_i \omega, \end{aligned}$$

da alle Summen endlich sind.

Es ist noch zu zeigen, dass im Falle dass der Träger von ω in einer positiv orientierten Karte enthalten, die letzte Definition mit der vorherigen übereinstimmt. Sei

$$\phi : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V},$$

eine positiv orientierte Karte die den Träger von ω enthält. Wir wollen zeigen, dass

$$\int_{\tilde{\phi}(A \cap \tilde{U})} \omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda_m = \sum_j \int_A f_j \omega$$

gilt. Zur Berechnung von $\int_A f_j \omega$ können wir eine beliebige positiv orientierte Karte, z.B. $\tilde{\phi}$ wählen. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_j \int_A f_j \omega &= \sum_j \int_{\tilde{\phi}(\tilde{U}_j \cap A)} (f_j \circ \tilde{\phi}^{-1})(\omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1}) d\lambda^n \\ &= \int_{\tilde{\phi}(\tilde{U}_j \cap A)} \left(\sum_j f_j \omega_{\tilde{\phi}} \right) \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda^n \\ &= \int_{\tilde{\phi}(A)} \omega_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda^n. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig für $\Omega_c^m(M)$. Der gleiche Beweis funktioniert für $\Omega_+^m(M)$, wenn man feststellt, dass die Summen mit den Integralen aufgrund von monotoner Konvergenz vertauscht werden können. ■

Elementare Eigenschaften dieser Konstruktion werden im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 1.4.3. 1. Sei $\omega \in \Omega_c^m(M) \cap \Omega_+^m(M)$ und $A \subset M$ eine Borelmenge. Ist

$$A = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^N A_i$$

eine Zerlegung von A in höchstens abzählbar viele, paarweise disjunkte, messbare Mengen, wobei A_0 eine Nullmenge ist, so gilt

$$\int_A \omega = \sum_{i=1}^N \int_{A_i} \omega.$$

2. Ist $\omega \in \Omega_+^m(M)$ und sind $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen mit $f \leq g$, dann gilt

$$\int_A f \omega \leq \int_A g \omega.$$

3. Sei $F : M \rightarrow N$ ein orientierungserhaltender glatter Diffeom, mit N einer weiteren glatten orientierten UMF mit Rand. D.h., F ist ein glatter Diffeo und

$$dF(x) : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} M$$

bildet positiv orientierte Basen auf ebensolche ab für alle $x \in M$. Ist dann $A \subset M$ eine Borelmenge und $\omega \in \Omega_c^m(N) \cup \Omega_+^m(N)$, so gilt

$$\int_A F^* \omega = \int_{F(A)} \omega.$$

4. Es Bezeichne $-M$ die glatte UMF mit Rand M , versehen mit der entgegengesetzten Orientierung, d.h. auf jedem Tangentialraum wird jeweils die anderen der beiden Orientierungen gewählt. Dann gilt:

$$\int_{-A} \omega = - \int_A \omega \quad \text{für jede Borelmenge } A \subset M.$$

Beweis. Alle Eigenschaften folgen in Karten aus entsprechenden Eigenschaften des Lebesgue Integrals; Details werden in den Übungen erklärt. ■

Korollar 1.4.4. Ist $\omega \in \Omega_+^m(M)$, so ist

$$A \mapsto \mu_\omega(A) := \int_A \omega \in [0, \infty]$$

ein Borel-Maß auf M , mit

$$\int_M f(x) \mu_\omega(dx) = \int_M f \omega \quad \text{für alle } f \in C_c^\infty(M).$$

Beweis. Dies folgt aus der ersten Eigenschaft aus Satz 1.4.3. ■

1.5. Satz von Stokes. Wir erinnern an den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,

$$\int_{[a,b]} f'(x) dx := \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

d.h. das Integral von f' kann durch den Rand a, b von $[a, b]$ ausgedrückt werden. Der Satz von Stokes stellt eine weitreichende Verallgemeinerung dieses Sachverhalts dar.

Ist $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit $\partial M \neq \emptyset$, so wird ∂M eine $(m-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, und für einen Randpunkt $x \in \partial M$ ist der Tangentialraum $T_x \partial M$ von ∂M im Punkt x ein $(m-1)$ -dimensionaler Unterraum des m -dimensionalen Tangentialraumes $T_x M$.

Definition 1.5.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit $\partial M \neq \emptyset$. Die eindeutig bestimmte glatte Abbildung

$$\partial M \ni x \mapsto \nu(x) \in T_x M \subset \mathbb{R}^l$$

mit

- (1) $\nu(x) \perp T_x(\partial M)$,
- (2) $|\nu(x)| = 1$,
- (3) es existiert eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, 0] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = \nu(x)$,

heißt *Vektorfeld der äußeren Normalen* auf dem Rand ∂M .

Die erste Bedingung legt die Gerade fest, auf der $\nu(x)$ liegt, der zweite den Abstand zu x und der Dritte auf welcher Seite von ∂M dieser Punkt liegt. Es muss strikt gesprochen noch die Glattheit von $x \mapsto \nu(x)$ gezeigt werden (Übung).

Definition 1.5.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine und glatte m -dimensionale UMF mit $\partial M \neq \emptyset$ mit Orientierung $\mathcal{O}_M = (\mathcal{O}_{T_x M})_{x \in M}$ und $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^l$ das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes. Wir definieren eine Orientierung $\mathcal{O}_{\partial M}$ auf dem Rand durch

$$(v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathcal{O}_{T_x(\partial M)} \iff (\nu(x), v_1, \dots, v_{n-1}) \in \mathcal{O}_{T_x M}.$$

Diese Orientierung $\mathcal{O}_{\partial M}$ heißt die *durch $\mathcal{O}_M$ induzierte Orientierung auf ∂M* .

Von nun an wird der Rand einer orientierten UMF mit nichtleerem Rand auf diese Art orientiert. Damit kommen wir nun zu einem der zentralen Resultate dieser Vorlesung:

Satz 1.5.3 (Satz von Stokes). *Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand. Ist M orientiert (also auch ∂M im obigen Sinne), so gilt*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad \text{für alle } \omega \in \Omega_c^{m-1}(M).$$

Bemerkung 1.5.4. 1. Auf der rechten Seite wird ω als Form auf ∂M betrachtet, indem man nur Tangentialvektoren aus ∂M einsetzt. Ist $i_{\partial M} : \partial M \rightarrow M$ die Inklusion, so ist dies gerade die Pull-back Form $i_{\partial M}^* \omega$. In dieser etwas pedantischen Notation wird der Satz von Stokes zu

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i_{\partial M}^* \omega.$$

2. Die Formel gilt auch im Falle $\partial M = \emptyset$, wobei dann die rechte Seite durch 0 zu ersetzen ist.

Beweis. Wähle einen abzählbaren, lokal endlichen, positiv orientierten Atlas

$$\tilde{\phi}_j : \tilde{U}_j \longrightarrow \tilde{V}_j, \quad j \in J.$$

Sei $(f_j)_{j \in J}$ eine untergeordnete Teilung der Eins. Dann ist

$$\omega = \sum_j f_j \omega,$$

wobei die Summe endlich ist. Da die linke und rechte Seite von (*) der zu beweisenden Formel linear in ω ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\int_M d(f_\alpha \omega) = \int_{\partial M} f_\alpha \omega$$

gilt. Deshalb können wir zum Beweis o.B.d.A. annehmen, dass der Träger von ω in einem positiv orientierten Kartengebiet von M liegt. Wir werden (*) nun durch direktes Ausrechnen beider Integrale beweisen.

Berechnung von $\int_M d\omega$:

Sei

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{V}$$

eine positiv orientierte Karte mit $\tilde{V} \subset \mathbb{R}_+^m$ offen. Bezüglich dieser Karte ist ω durch

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m$$

gegeben, mit

$$\omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right).$$

Wenden wir das äußere Differential an, so ergibt sich,

$$d\omega = \sum_{i=1}^m d\omega_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} [\omega_i] dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

und durch Umordnen,

$$d\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_i} [\omega_i] dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}_+^m} \partial_i (\omega_i \circ \tilde{\phi}^{-1})(x_1, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i-1} \int_{[0, \infty)} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \partial_i (\omega_i \circ \tilde{\phi}^{-1})(x_1, \dots, x_m) dx_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_m \\ &\quad + (-1)^{m-1} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \int_{[0, \infty)} \partial_m (\omega_m \circ \tilde{\phi}^{-1})(x_1, \dots, x_m) dx_m dx_1 \cdots dx_{m-1}, \end{aligned}$$

wegen Fubini. Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (HDI) gilt für alle $i < m$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_i (\omega_i \circ \tilde{\phi}^{-1})(x_1, \dots, x_m) dx_i = 0.$$

Dies ist ein Argument der Art

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} (f(b) - f(a)) = 0,$$

wenn f bei $\pm\infty$ verschwindet.

Für $i = m$ gilt, wieder wegen des HDI

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_m} (\omega_m \circ \tilde{\phi}^{-1}) dx_m = -\omega_m(\tilde{\phi}^{-1}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)).$$

Dies ist ein Argument der Art

$$\int_0^{\infty} f'(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (f(b) - f(0)) = f(0),$$

wenn f bei $+\infty$ verschwindet. Also,

$$\int_M d\omega = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \omega_m(\tilde{\phi}^{-1}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)) d\lambda_{m-1}.$$

Berechnung von $\int_{\partial M} \omega$:

Ist $\tilde{U} \cap \partial M = \emptyset$, so ist $\tilde{V}$ eine Teilmenge des Inneren von $\mathbb{R}_+^m$ und $\omega_m \circ \tilde{\phi}^{-1}$ verschwindet auf dem Rand von $\mathbb{R}_+^m$, daher

$$\int_M d\omega = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial M} \omega = 0,$$

und die Formel gilt in diesem Falle.

Sei also $\tilde{U} \cap \partial M \neq \emptyset$. Wegen $\text{supp}(\omega) \subset \tilde{U}$ gilt $\text{supp}(\omega|_{\partial M}) \subset \tilde{U} \cap \partial M$. Die Abbildung

$$\varphi := (x_1, \dots, x_{m-1})$$

ist eine Karte von ∂M mit Definitionsbereich $\tilde{U} \cap \partial M$. Sei $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^l$ das Vektorfeld der äußeren Normalen. Für $x \in \tilde{U} \cap \partial M$ sind die folgenden geordneten Basen von $T_x M$ gleichorientiert

$$\begin{aligned} \left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}(x) \right) &\sim \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}(x), (-1)^m \nu(x) \right) \\ &\sim \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}(x), (-1)^m \frac{\partial}{\partial x_m}(x) \right), \end{aligned}$$

da per Definition $\nu(x)$ nach außen zeigt und $\frac{\partial}{\partial x_m}(x)$ nach innen. Also ist φ eine positiv orientierte Karte von ∂M falls m gerade ist und eine negativ orientierte Karte falls m ungerade ist.

Für die lokale Darstellung von $\omega|_{\tilde{U} \cap \partial M}$ als $(m-1)$ -Form bezüglich der Randkarte φ gilt

$$\omega|_{\tilde{U} \cap \partial M} = \omega^\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \right) = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_m) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \right) \\ &= \omega_m \cdot (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} \right) = \omega_n, \end{aligned}$$

also

$$\omega|_{U \cap \partial M} = \omega_m \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{m-1}$$

als lokal definierte $(m-1)$ -Form auf ∂M . Es folgt

(a) Falls m gerade:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \partial M)} \omega_m \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda_{m-1} = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \omega_m(\tilde{\phi}^{-1}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)) d\lambda_{m-1}.$$

(b) Falls m ungerade (die Orientierung beachtend) analog:

$$\int_{\partial M} \omega = - \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \omega_m(\tilde{\phi}^{-1}(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)) d\lambda_{m-1}.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

1.6. Klassische Integralsätze. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand, und im Falle $\partial M \neq \emptyset$ sei $\nu : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^l$ das Vektorfeld der äußeren Normalen des Randes.

Definition 1.6.1. Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Die lineare Abbildung

$$L_X := \iota_X d + d\iota_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

wird die *Lie-Ableitung bezüglich X* genannt.

Ist $\omega \in \Omega^m(M)$ eine glatte *Volumenform*, so ist $L_X \omega \in \Omega^m(M)$, d.h. es existiert aus Dimensionsgründen eine eindeutig bestimmte Funktion $\operatorname{div}_\omega(X) \in C^\infty(M)$ mit

$$L_X \omega = \operatorname{div}_\omega(X) \omega.$$

Die behauptete Glattheit folgt aus der lokal (d.h. in jeder Karte) gültigen Formel

$$\operatorname{div}_\omega(X) = (L_X \omega)(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}) / \omega(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}).$$

Definition 1.6.2. Die Funktion $\operatorname{div}_\omega(X)$ wird die ω -Divergenz von X genannt.

Damit ist

$$\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

ein linearer Differentialoperator erster Ordnung.

Bemerkung 1.6.3. Es gelten folgende lokale Formeln: Falls $X = \sum_j X_j \partial_{x_j}$ und $\omega = \tilde{\omega} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ mit $\tilde{\omega}$ einer glatten nirgends verschwindenden Funktion,

$$\operatorname{div}_\omega(X) = \frac{1}{\tilde{\omega}} \sum_j \partial_{x_j} [\tilde{\omega} X_j],$$

insbesondere ist $\operatorname{div}_\omega(X)$ kompakt getragen falls X dies ist, und weiterhin

$$\operatorname{div}_\omega(fX) = f \operatorname{div}_\omega(X) + X[f] \quad \text{für alle } f \in C^\infty(M),$$

wegen der Derivationseigenschaft von ∂_{x_j} .

Korollar 1.6.4 (Divergenzsatz I). *Sei M orientiert, $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger und sei ω eine glatte Volumenform auf M . Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div}_\omega(X) \omega = \int_{\partial M} \iota_X \omega.$$

Beweis. Es gilt

$$L_X \omega = d\iota_X \omega + \iota_X d\omega = d\iota_X \omega,$$

da es aus Dimensionsgründen keine glatten $m+1$ -Formen auf M gibt, und somit

$$\int_M \operatorname{div}_\omega(X) \omega = \int_M L_X \omega = \int_M d(\iota_X \omega) = \int_{\partial M} \iota_X \omega,$$

nach dem Satz von Stokes. ■

Wir wollen nun dieses Resultat auf eine besondere Volumenform anwenden, die *Riemannsche Volumenform*.

Definition 1.6.5. a) Definiere für $x \in M$ das Skalarprodukt

$$g_x^M : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_x^M(v, w) := \sum_{j=1}^l v_j w_j, \quad v, w \in T_x M \subset \mathbb{R}^l.$$

Die Familie von Skalarprodukten $(g_x^M)_{x \in M}$ wird die vom $\mathbb{R}^l$ induzierte *Riemannsche Metrik* auf M genannt.

b) Sei

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$$

eine Karte. Dann heißt die glatte symmetrische matrixwertige Funktion $x \mapsto g_{ij}^M(x) := g_x^M(\partial_{x_i}(x), \partial_{x_j}(x))$ auf $\tilde{U}$ der *metrische Tensor* von g bezüglich der Karte.

Dieses Datum hängt glatt von x im Folgenden Sinne ab: für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist die Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g_x^M(X(x), Y(x))$$

glatt.

Bemerkung 1.6.6. 1. Ist $m = l$ so gilt $T_x M = \mathbb{R}^l$ und g_x^M ist konstant gleich des Euklidischen Skalarprodukts.

2. Man kann solche Familien von Skalarprodukten auch auf abstrakten Mannigfaltigkeiten definieren (wobei die Riemannsche Metrik dann Teil des Datums ist und nicht kanonisch gegeben), und nennt das Paar (M, g) eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Mit diesem Datum können wir jeder Funktion ein Vektorfeld zuordnen:

Definition 1.6.7. Für $f \in C^\infty(M)$ ist der *Gradient* $\text{grad}_M(f) \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch

$$g_x^M(\text{grad}_M(f)(x), v) := df(x)(v), \quad x \in M, v \in T_x M.$$

Damit ist

$$\text{grad}_M : C^\infty(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

ein linearer Differentialoperator erster Ordnung.

Beispiel 1.6.8. Ist $m = l$ so gilt

$$\text{grad}_M(f) = (\partial_1 f, \dots, \partial_l f).$$

Satz 1.6.9. Sei M orientiert. Dann existiert genau eine Volumenform $\omega_M \in \Omega_+^m(M)$, so dass für alle $x \in M$ und jede positiv orientierte Basis $(v_1, \dots, v_m)$ von $T_x M$ gilt

$$\omega_M(x) = \sqrt{\det(g_x(v_i, v_j))} v_1^* \wedge \dots \wedge v_m^*,$$

die Riemannsche Volumenform von M .

Beweis. Man muss die Unabhängigkeit der Definition von $(v_1, \dots, v_m)$ und die Glattheit beweisen (Übung). ■

Lemma 1.6.10. *Sei M orientiert. Dann gilt*

$$\omega_{\partial M} = \iota_\nu \omega|_{\partial M},$$

im dem Sinne, dass für alle $x \in M$, $w_1, \dots, w_{m-1} \in T_x \partial M$,

$$\omega_{\partial M}(x)(w_1, \dots, w_{m-1}) = \omega(\nu(x), w_1, \dots, w_{m-1}).$$

Beweis. Sei $x \in \partial M$ und $(v_1, \dots, v_{m-1})$ eine positiv orientierte g_x^M -Orthonormalbasis von $T_x \partial M$; also ist $(\nu(x), v_1, \dots, v_{m-1})$ eine positiv orientierte g_x^M -Orthonormalbasis von $T_x M$, und somit

$$\omega_{\partial M}(x)(v_1, \dots, v_{m-1}) = 1 = \omega_M(x)(\nu(x), v_1, \dots, v_{m-1}),$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Wir setzen

$$\operatorname{div}_M := \operatorname{div}_{\omega_M}$$

und bezeichnen das nach Korollar 1.4.4 von ω_M induzierte Borel-Maß auf M mit

$$\mu_M := \mu_{\omega_M},$$

wobei wir diese Konstruktion auch mit ∂M statt M im Folgenden Resultat benutzen werden.

Bemerkung 1.6.11. Im Falle $m = l$ gilt

$$\operatorname{div}_M(X) = \sum_{j=1}^l \partial_j X_j, \quad \omega_M = d\widehat{x}_1 \wedge \dots \wedge d\widehat{x}_m|_M, \quad \omega_M = \lambda_m|_M,$$

wobei

$$\operatorname{id}_{\mathbb{R}^m} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_m) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \operatorname{to} \mathbb{R}^m$$

die Standardkarte des $\mathbb{R}^m$ bezeichnet, also

$$\partial_{\widehat{x}_j} = \partial_j.$$

Satz 1.6.12 (Divergenzsatz II). *Sei M orientiert und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div}_M(X)(x) \mu_M(dx) = \int_{\partial M} g(x)(X(x), \nu(x)) \mu_{\partial M}(dx).$$

Beweis. Es ist aufgrund des obigen Divergenzsatzes lediglich zu zeigen, dass

$$(\iota_X \omega_M)(x) = g^M(x)(X(x), \nu(x)) \omega_{\partial M}(x) \quad \text{für alle } x \in \partial M.$$

Das Vektorfeld X zerlegt sich in eine Normalen- und Tangentialkomponente

$$X(x) = g^M(x)(X(x), \nu(x)) \nu(x) + Y(x),$$

wobei der erste Summand in $T_x M$ ist und orthogonal zu $T_x \partial M \subset T_x M$ steht und der zweite Summand in $T_x \partial M$, also

$$(\iota_\nu \omega_M)(x) = g^M(x)(X(x), \nu(x)) (\iota_\nu \omega_M)(x) + (\iota_Y \omega_M)(x).$$

Für $v_1, \dots, v_{m-1} T_x \partial M$ gilt

$$\begin{aligned} & (\iota_X \omega_M)(x)(v_1, \dots, v_{m-1}) \\ &= g^M(x)(X(x), \nu(x))(\iota_\nu \omega_M)(x)(v_1, \dots, v_{m-1}) + \omega_M(x)(Y(x), v_1, \dots, v_{m-1}) \\ &= g^M(x)(X(x), \nu(x))(\iota_\nu \omega_M)(x)(v_1, \dots, v_{m-1}) \\ &= g^M(x)(X(x), \nu(x))\nu(x)\omega_{\partial M}(x)(v_1, \dots, v_{m-1}), \end{aligned}$$

wobei die zweite Identität wegen der linearen Unabhängigkeit von $Y(x), v_1, \dots, v_{m-1}$ folgt, und die letzte wegen Lemma 1.6.10. ■

2. GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Eine (skalare) gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung k ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \quad \text{genauer: } F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0,$$

wobei x eine reelle Variable ist und $y = y(x)$ eine gesuchte Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$. Allgemeiner betrachtet man Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen der Ordnung k , wobei man nun in der obigen Formel erlaubt, dass y sowie F Werte im $\mathbb{R}^m$ annehmen. Man schreibt dann manchmal ausführlicher

$$(11) \quad F_j(x, y_1, \dots, y_m, y'_1, \dots, y'_m, \dots, y_1^{(k)}, \dots, y_m^{(k)}) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

wobei nun $y = (y_1, \dots, y_m)$ die gesuchte Funktion ist.

In der Physik spielt die Variable x häufig die Rolle der Zeit und wird dann mit t statt x bezeichnet.

Die Bezeichnung „gewöhnliche Differentialgleichung“ (DGL) bezieht sich auf die Tatsache, dass nur „gewöhnliche“ Ableitungen nach der einen Variablen x vorkommen (im Gegensatz zu „partiellen“ Ableitungen in „partiellen Differentialgleichungen“).

Die Funktion F ist auf einer Teilmenge D des $\mathbb{R}^{1+m(k+1)}$ definiert; eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ von (11) ist eine stetig differenzierbare Funktion, sodass für alle $x \in I$ die Bedingungen

$$x, y_1(x), \dots, y_m(x), y'_1(x), \dots, y'_m(x), \dots, y_1^{(k)}(x), \dots, y_m^{(k)}(x) \in D$$

und

$$F_j(x, y_1(x), \dots, y_m(x), y'_1(x), \dots, y'_m(x), \dots, y_1^{(k)}(x), \dots, y_m^{(k)}(x)) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

erfüllt sind. Lässt sich die Gleichung nach der höchsten Ableitung von y auflösen, also in der Form

$$(12) \quad y^{(k)} = \tilde{F}(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) = 0$$

schreiben, so nennt man die DGL *explizit*. Diese Form kann man in fast allen typischen Anwendungen annehmen. Für Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen gibt es einen Transformationstrick (später!), durch den man OBdA Systeme erster Ordnung betrachten kann. Wir bemerken vorab, dass man typischerweise Anfangswerte der gesuchten Funktionen

bis zur Ordnung $k - 1$ vorgeben muss, um eindeutige Lösungen zu erhalten (ohne diese Vorgabe erhält man oft unendlich viele Lösungen).

Beispiel 2.0.1. Nicht alle DGLs sind lösbar: z.B. impliziert $|y'| = -|y - x|$ (genauer: $|y'(x)| = -|y(x) - x|$) zum einen $y = \text{const.}$ für alle x , und zum anderen auf $y(x) = x$ für alle x , ein Widerspruch.

Beispiel 2.0.2. Die Bahnkurve $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eines Punktteilchens der Masse $\mathbf{m}$ im $\mathbb{R}^m$, die sich unter dem Einfluss der zeitabhängigen Kraft $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ bewegt, ist die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$y''(t) = \mathbf{m} F(t, y(t)),$$

wobei y' dann die Geschwindigkeit und y'' die Beschleunigung des Punktteilchens ist. Z.B. beschreibt die konstante Kraft

$$F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \longmapsto -\mathbf{m} g$$

mit der Fallbeschleunigungskonstanten $-9,81 \times (m/s^2)$ den freien Fall eines Punktteilchens der Masse $\mathbf{m}$, d.h. $y(t)$ ist in diesem Falle die Höhe zum Zeitpunkt t .

2.1. Elementar lösbare DGLs. Bevor wir abstrakte Überlegungen anstellen, konzentrieren wir uns erst elementar lösbare (explizite) skalare DGLs erster Ordnungen, also Gleichungen der Form

$$y' = f(x, y),$$

mit einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$. Geometrisch: Jedem Punkt $(x, y) \in D$ ist durch $y' = f(x, y)$ eine Steigung, also eine Richtung in der (x, y) -Ebene, zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Richtungen wird als *Richtungsfeld* der DGL bezeichnet. Die Lösungen der DGL sind also die Funktionen $y = y(x)$, für die in jedem Punkt des Graphen die Tangentialrichtung mit der durch $y' = f(x, y)$ vorgegebenen Richtung übereinstimmt.

2.1.1. DGLs mit y -unabhängiger rechter Seite. Die einfachste DGL ist $y'(x) = f(x)$ (also $y'(x) = f(x)$), mit einer stetigen Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Nach dem HDI ist jede Stammfunktion von f eine Lösung der DGL, und für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(u) du$$

die eindeutig bestimmte Lösung der DGL mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$.

Beispiel 2.1.1. Sei $k \in \mathbb{N}$. Die DGL $y' = x^k$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ lösbar und alle Lösungen sind von der Form $y(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Soll die Anfangswertaufgabe $y(x_0) = y_0$ erfüllt werden, so fixiert dies C via

$$y_0 = y(x_0) = \frac{x_0^{k+1}}{k+1} + C,$$

also

$$C = y_0 - \frac{x_0^{k+1}}{k+1}.$$

2.1.2. *DGLs mit getrennten Variablen.* Eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen hat die Gestalt $y' = f(x)g(y)$. Diese kann immer elementar gelöst werden (bis auf die eventuell schwierige Berechnung von Stammfunktionen):

Satz 2.1.2. *Seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I_1$, $y_0 \in I_2$, $g(y_0) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung von x_0 in der das Anfangswertproblem*

$$(13) \quad \text{AWP} \quad y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung besitzt. Wählt man eine Stammfunktion G von $1/g$ und eine Stammfunktion F von f mit $G(y_0) = F(x_0)$, so erhält man die Lösung durch Auflösen der Gleichung

$$G(y) = F(x)$$

nach y . Diese Auflösung ist stets möglich.

Beweis. Existenz: Wegen $g(y_0) \neq 0$ ist $g(y) \neq 0$ für y nahe y_0 , d.g. G ist streng monoton nahe y_0 und somit ist G dort umkehrbar. Wegen $F(x_0) = G(y_0)$ existiert also eine Funktion $y(\cdot)$, die auf einer Umgebung von x_0 definiert ist mit

$$y(x) = G^{-1}(F(x)) \quad \text{und} \quad y(x_0) = y_0.$$

Nach der Kettenregel und der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion gilt also

$$y'(x) = \frac{d}{dx} G^{-1}(F(x)) = \frac{1}{G'(G^{-1}(F(x)))} F'(x).$$

Aus $y(x) = G^{-1}(F(x))$ folgt:

$$y'(x) = \frac{1}{G'(y(x))} f(x) = g(y(x)) f(x),$$

und $y(\cdot)$ ist eine Lösung des Anfangswertproblems.

Eindeutigkeit: Sei z irgendeine Lösung des AWP. Wegen $g(z(x_0)) = g(y_0) \neq 0$ ist dann $g(z(x)) \neq 0$ für x nahe x_0 , also aufgrund der Differenzialgleichung:

$$\frac{z'(x)}{g(z(x))} = f(x) \quad \text{für } x \text{ nahe } x_0.$$

Integration von x_0 bis x liefert (mit Hilfe der Substitution $s = z(t)$):

$$F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt = G(y_0) + \int_{x_0}^x \frac{z'(t)}{g(z(t))} dt = G(y_0) + \int_{y_0}^{z(x)} \frac{1}{g(s)} ds = G(z(x)).$$

D.h., z ist die Lösung der Gleichung $F(x) = G(z(x))$, also

$$z(x) = G^{-1}(F(x)) = y(x).$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Bemerkung 2.1.3. 1. Ist $g(y_0) = 0$, so ist $y \equiv y_0$ eine auf ganz I_1 definierte Lösung des Anfangswertproblems.

2. DGLs der Art $y' = g(y)$ sind offenbar oben enthalten und werden *autonome DGLs* genannt.

3. In der Praxis geht man wie folgt vor: Wähle eine Stammfunktion G von $1/g$ und F von f und schreibe $G(y) = F(x) + C$, für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$; löse dies nach y auf; bestimme dann C durch den Anfangswert. Auf jeder Umgebung von x_0 in der diese Rechenoperationen erlaubt sind, bekommt man eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beispiel 2.1.4. Für die DGL $y' = xy^2$ gilt $f(x) = x$, $g(y) = y^2$, also insbesondere $g(y_0) \neq 0$ für alle $y_0 \neq 0$. Stammfunktionen von f und $\frac{1}{g}$ sind

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad G(y) = -\frac{1}{y}.$$

Aus $G(y) = F(x) + C$ folgt also

$$y(x) = -1 / \left(\frac{1}{2}x^2 + C \right).$$

Der Anfangswert $y(x_0) = y_0$ fixiert schließlich die Konstante C ,

$$y_0 = y(x_0) = -1 / \left(\frac{1}{2}x_0^2 + C \right),$$

also

$$C = -\frac{1}{y_0} - \frac{1}{2}x_0^2.$$

Wir erhalten die Lösung

$$y(x) = 1 / \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{y_0} - \frac{1}{2}x_0^2 \right),$$

Falls $C \geq 0$, so ist diese Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert; im Falle $C < 0$, ist die Lösung nur auf $[-(-2C)^{1/2}, +(-2C)^{1/2}]$ definiert.

Bemerkung 2.1.5. Es gibt einige DGLs erster Ordnung, die man durch eine geeignete Transformation auf in eine DGL mit getrennten Veränderlichen überführen kann. Z.B.:

- Bei DGLs der Form $y' = f(ax + by + c)$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ wobei (OBdA) $b \neq 0$ führt die Transformation $u(x) := ax + by + c$ auf eine DGL für u mit getrennten Veränderlichen.
- Analog kann man $y' = f(y/x)$ die Transformation $u(x) := y(x)/x$ betrachten.

2.1.3. *Die lineare DGL erster Ordnung.* DGLs der Art

$$y' + f(x)y = g(x)$$

heißen *lineare DGL erster Ordnung*. Der Grund für diesen Namen: Die DGL ist äquivalent zu $F(x, y, y') = 0$, falls man

$$F(x, y, y') := y' + f(x)y - g(x)$$

setzt, und die Funktion $(y, y') \mapsto F(x, y, y')$ ist affin linear von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

Die Funktion g heißt die *rechte Seite* oder *Inhomogenität* oder *Störterm* der DGL; ist $g \equiv 0$ so heißt die DGL *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Der homogene Fall $y' + f(x)y = 0$ hat getrennte Veränderliche: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall I und sei das Anfangswertproblem AWP $y(x_0) = y_0$ zu lösen. Dann ist $G(y) := -\log(|y|)$ eine Stammfunktion von $-1/y$ und

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(u) du$$

eine Stammfunktion g ; man erhält

$$-\log(|y|) = \int_{x_0}^x f(u) du + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

also ist

$$y(x) = y_0 \exp \left(- \int_{x_0}^x f(u) du \right),$$

die auf ganz I definierte und eindeutige Lösung des AWP. Das Vorzeichen ist konstant und hängt also nur vom Vorzeichen von y_0 ab.

Will man im inhomogenen Fall das AWP

$$y' + f(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

lösen, so benutzt man einen Trick: die *Variation der Konstanten*. In Motiviert von der Lösung des homogenen Falls, macht man nun den Ansatz

$$y(x) := C(x) \exp \left(- \int_{x_0}^x f(u) du \right) =: C(x) \tilde{y}(x),$$

mit einer noch zu bestimmenden stetig differenzierbaren Funktion $C : I \rightarrow \mathbb{R}$. Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$C'(x) \tilde{y}(x) + C(x) \tilde{y}'(x) + C(x) f(x) \tilde{y}(x) = g(x).$$

Wegen $\tilde{y}' + f(x)\tilde{y} = 0$ heben sich die letzten beiden Summanden heraus und es folgt

$$C'(x) = \frac{g(x)}{\tilde{y}(x)}.$$

Wegen

$$\tilde{y}(x) = \exp \left(- \int_{x_0}^x f(t) dt \right)$$

ergibt sich

$$C'(x) = g(x) \exp \left(\int_{x_0}^x f(t) dt \right)$$

und somit

$$C(x) = \int_{x_0}^x g(s) \exp \left(\int_{x_0}^s f(t) dt \right) ds + D,$$

für ein $D \in \mathbb{R}$. Wir erhalten weiterhin

$$y_0 = y(x_0) = C(x_0)\tilde{y}(x_0) = D \cdot 1 = D.$$

Dies diktiert:

Satz 2.1.6. *Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' + f(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0$$

die auf ganz I definierte und eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x f(t) dt\right) \cdot \left(\int_{x_0}^x g(s) \exp\left(\int_{x_0}^s f(t) dt\right) ds + y_0\right).$$

Beweis. Wir haben oben gezeigt, dass y das Anfangswertproblem löst. Sind z_1 und z_2 Lösungen, so ist

$$w := z_1 - z_2$$

eine Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$w' + f(x)w = 0, \quad w(x_0) = 0.$$

Diese ist aber durch die Eindeutigkeit der Lösung des homogenen Anfangswertproblems gegeben durch $w \equiv 0$. ■

2.1.4. *Exakte DGLs.* Eine DGL der Art

$$y'h(x, y) + g(x, y) = 0$$

mit $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und

$$h, g : D \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig, heißt *exakt*, wenn eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$h(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y), \quad g(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y).$$

Ein solches F heißt eine *Stammfunktion* der Gleichung. Die DGL liefert

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = g(x, y(x)) + h(x, y(x))y'(x) = 0,$$

d.h. auf einer Lösungskurve $y = y(x)$ der Differenzialgleichung ist F konstant; die Lösungskurven sind die Niveaulinien von F .

Beispiel 2.1.7. Die Halbkreise

$$y_c(x) = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$$

sind die Niveaulinien von $F(x, y) = x^2 + y^2$, also die Lösungen der DGL

$$2y'y + 2x = 0 \quad \text{bzw.} \quad y'y + x = 0.$$

Satz 2.1.8. Seien $h, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $h \neq 0$ auf D . Ist die DGL

$$y'h(x, y) + g(x, y) = 0$$

exakt mit Stammfunktion $F \in C^1(D)$, so erhält man durch Auflösen der Gleichungen $F(x, y) = C$ für $C \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der DGL (die Bedingung $h = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ auf D garantiert, dass die Gleichungen $F(x, y) = C$ lokal nach y auflösbar sind (nach dem Satz über implizite Funktionen)).

Satz 2.1.9. Ist D sternförmig bezüglich 0 und sind $g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist die DGL

$$(14) \quad y'h(x, y) + g(x, y) = 0$$

genau dann exakt, wenn gilt

$$(15) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in D.$$

Man erhält eine Stammfunktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ via

$$(16) \quad F(x, y) = x \int_0^1 h(tx, ty) dt + y \int_0^1 g(tx, ty) dt.$$

Beweis. Ist die DGL exakt mit Stammfunktion F , so folgt (15) durch ableiten von

$$\partial_y F = h, \quad \partial_x F = g$$

nach x bzw. nach y und dem Satz von Schwarz (wobei aus den Voraussetzung folgt, dass $F \in C^2(D)$). Diese Richtung braucht keine Voraussetzung an D . Gilt umgekehrt, (15), so rechnet man damit nach, dass die durch (16) definierte Funktion F eine Stammfunktion der DGL ist, wobei die Wohldefiniertheit von F die Sternförmigkeit von D benutzt. ■

Eine nicht-exakte DGL kann unter Umständen durch Multiplikation mit einer Funktion $M(x, y) \neq 0$ exakt gemacht werden, wobei so eine Funktion wird als *integrierender Faktor* bezeichnet wird. Die Lösungsmenge der DGL bleibt hierbei gleich.

Beispiel 2.1.10. Die Gleichung

$$2y'x + y = 0 \quad (h = 2x, \quad g = y, \quad \partial_x h = 2, \quad \partial_y g = 1)$$

ist nicht exakt. Durch Multiplizieren mit $M(x, y) = y$ wird sie exakt:

$$2y'xy + y^2 = 0, \quad (h = 2xy, \quad g = y^2, \quad \partial_x h = 2y, \quad \partial_y g = 2y).$$

Durch Multiplikation mit $M(x, y) = x^{-1/2}$ wird die DGL ebenfalls exakt. Man erhält eine Stammfunktion c(erraten der ausrechnen)

$$F(x, y) = xy^2,$$

also sind alle Lösungen von der Art

$$y(x) = Cx^{-1/2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Im Setting von Satz 2.1.9 ist $M(x, y)$ genau dann ein integrierender Faktor von (14), wenn $\partial_y(Mg) = \partial_x(Mh)$, d. h.

$$(17) \quad (\partial_y M)g + M(\partial_y g) = (\partial_x M)h + M(\partial_x h).$$

Auf der Suche nach nur von einer Variablen abhängenden integrierenden Faktoren (wie im obigen Beispiel) bekommt so unmittelbar ein Kriterium, dass solche Funktionen selbst als DGLs darstellt:

Korollar 2.1.11. *Sei D sternförmig bezüglich 0.*

a) *Ist $h \neq 0$ auf D , so ist eine C^1 -Funktion $M(x)$ genau dann ein integrierender Faktor von (14), wenn gilt*

$$\frac{M'(x)}{M(x)} = \frac{\partial_y g(x, y) - \partial_x h(x, y)}{h(x, y)} \quad \text{für alle } (x, y) \in D.$$

Ein solcher Faktor existiert, wenn hier die rechte Seite nur von x abhängt.

b) *Ist $g \neq 0$ auf D , so ist eine C^1 -Funktion $M(y)$ genau dann ein integrierender Faktor von (14), wenn gilt*

$$\frac{M'(y)}{M(y)} = \frac{\partial_x h(x, y) - \partial_y g(x, y)}{g(x, y)} \quad \text{für alle } (x, y) \in D.$$

Ein solcher Faktor existiert, wenn hier die rechte Seite nur von y abhängt.

Beweis. a) Die behauptete Gleichung folgt aus (17). Hängt die rechte Seite nicht von y , so führ dies auf eine lineare homogene DGL erster Ordnung in M .

b) Analog. ■

In zahlreichen konkreten Fällen haben wir gesehen, dass das Anfangswertproblem

2.2. Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf. In vielen Beispielen haben wir gesehen, dass das Anfangswertproblem (AWP)

$$(18) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

zumindest lokal genau eine Lösung besitzt. Dies ist aber nicht immer der Fall:

Beispiel 2.2.1. Betrachte $y' = |y|^{1/2}$ mit Anfangswert $y(0) = 0$. Die Funktion $y \equiv 0$ löst das AWP auf $\mathbb{R}$, aber auch

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

↪ Wann ist das AWP lokal eindeutig lösbar? Hier wird die Lipschitzbedingung eine zentrale Rolle spielen.

Wir betrachten nun explizite Anfangswertaufgaben der Art (18), wobei wir von Systemen ausgehen. D.h.

$$f = (f_1(\cdot), \dots, f_m(\cdot)) : G \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

mit $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen, sodass Lösungen $y(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_m(\cdot))$ ebenfalls Werte im $\mathbb{R}^m$ annehmen. Explizit lautet die DGL also

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \\ &\vdots \\ y_m'(x) &= f_m(x, y_1(x), \dots, y_m(x)), \end{aligned}$$

für x aus einem Intervall.

Definition 2.2.2. Man sagt, f erfüllt bezüglich y eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L > 0$, wenn gilt:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in G.$$

Man sagt, f erfüllt lokal eine Lipschitzbedingung, wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in G$ eine offene Umgebung $U \subset G$ gibt, so dass $f|_U$ eine Lipschitzbedingung mit einer i.A. von U abhängenden Lipschitzkonstante $L = L(U)$ erfüllt.

Beispiel 2.2.3. a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2$ genügt lokal einer Lipschitzbedingung:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = |x(y + \tilde{y})(y - \tilde{y})| \leq |x(y + \tilde{y})||y - \tilde{y}|,$$

sodass man für beschränkte $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Lipschitzkonstante

$$L(U) := \sup_{(x, y), (x, \tilde{y}) \in U} |x(y + \tilde{y})| < \infty$$

erhält. Die Funktion genügt jedoch keiner globalen Lipschitzbedingung: Für $y = \tilde{y} + 1$ und $x = 1$ gilt

$$|f(1, y) - f(1, \tilde{y})| = L|y - \tilde{y}| \quad \text{mit } L = |2y + 1| \rightarrow \infty \text{ für } y \rightarrow \infty.$$

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = |y|^{1/2}$ genügt (bei 0) keiner Lipschitzbedingung. Es wird sich zeigen, dass das der Grund dafür ist, dass das AWP für $y' = |y|^{1/2}$ mit Anfangswert $y(x_0) = 0$ nicht eindeutig lösbar ist.

Hinsichtlich des Nachweises einer Lipschitzbedingung:

Satz 2.2.4. Sei f stetig und bezüglich y stetig partiell differenzierbar (d.h. f und $\partial_y f$ sind stetig in G). Dann gilt:

- a) f genügt lokal einer Lipschitzbedingung bezüglich y .
- b) Ist G konvex und sind die partiellen Ableitungen von f nach y in G beschränkt, so genügt f einer Lipschitzbedingung bezüglich y .

Beweis. a) Sei $(x_0, y_0) \in G$. Dann existiert ein $r > 0$ so, dass

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\} \subset G,$$

und in U alle partiellen Ableitungen von f nach y beschränkt sind. Nach dem m -dimensionalen Mittelwertsatz gilt dann

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \quad \text{für } (x, y), (x, \tilde{y}) \in U,$$

mit

$$L = \sup\{|\partial_y f(x, y)| : (x, y) \in U\},$$

wobei $|\partial_y f(x, y)|$ die Norm der linearen Abbildung $\partial_y f(x, y) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist.

b) In diesem Fall kann $U = G$ gewählt werden. ■

Satz 2.2.5 (Eindeutigkeitssatz für DGLs). *Sei f stetig und erfülle lokal eine Lipschitzbedingung bezüglich y . Ist I ein Intervall und sind $y(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $z(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ Lösungen des Anfangswertproblems*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = z(x_0)$$

für ein $x_0 \in I$, so gilt $y(x) = z(x)$ für alle $x \in I$ (lokale Lipschitzbedingung impliziert also globale Eindeutigkeit.)

Beweis. Würde die Behauptung nicht gelten, so gäbe es

- (i) ein $\tilde{x} > x_0$, $\tilde{x} \in I$ mit $y(\tilde{x}) \neq z(\tilde{x})$, oder
- (ii) ein $\tilde{x} < x_0$, $\tilde{x} \in I$ mit $y(\tilde{x}) \neq z(\tilde{x})$.

O.E. nehmen wir an, dass der erste Fall vorliegt. Sei

$$x_1 := \sup\{x \in I : y(s) = z(s) \text{ für } x_0 \leq s \leq x\} < \tilde{x}.$$

Da $y(\cdot)$ und $z(\cdot)$ stetig sind, gilt

$$y(x_1) = z(x_1).$$

Sei r so, dass

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |x - x_1| \leq r, |y - y(x_1)| \leq r\} \subset G$$

gilt und f in U eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L = L(U)$ erfüllt. Da $y(\cdot)$ und $z(\cdot)$ stetig sind, gibt es ein $\delta \in (0, r)$ mit

$$|y(x) - y(x_1)| \leq r, \quad |z(x) - y(x_1)| \leq r \quad \text{für } |x - x_1| < \delta.$$

Für alle $x \in I$ mit $0 \leq x - x_1 < \delta$ gilt dann,

$$|y(x) - z(x)| = \left| \int_{x_1}^x f(t, y(t)) - f(t, z(t)) dt \right| \leq \int_{x_1}^x L |y(t) - z(t)| dt.$$

Mit

$$0 \leq M(z) := \sup\{|y(t) - z(t)| : x_1 \leq t \leq z\}, \quad z \geq x_1,$$

gilt also für $0 \leq s - x_1 \leq x - x_1 \leq \delta$,

$$|y(s) - z(s)| \leq L(s - x_1)M(s) \leq L(x - x_1)M(x).$$

Daher folgt indem man links $\sup_{s \in [x_1, x]}$ bildet,

$$M(x) \leq L(x - x_1)M(x),$$

was $M(x) = 0$ impliziert, im Widerspruch zur Konstruktion von x_1 . ■

Wir kommen nun zum wichtigen:

Satz 2.2.6 (Existenzsatz von Picard–Lindelöf). a) Ist f stetig und erfüllt lokal eine Lipschitzbedingung bezüglich y , so gibt es zu beliebigem $(x_0, y_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$\text{AWP: } y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

in $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (nach dem Satz 2.2.5 eindeutig) lösbar ist.

b) Ist $[x_0, \hat{x})$ das größte rechts von x_0 gelegene rechtsoffene Intervall, auf dem die Lösung existiert, und ist K eine kompakte Teilmenge von G , so gibt es ein $\tilde{x} \in (x_0, \hat{x})$ mit $(x, y(x)) \notin K$ für $x > \tilde{x}$, d.h. die Lösung nähert sich für $x \rightarrow \hat{x}$ dem Rand von G bzw. wird unendlich. (Entsprechendes gilt, wenn $(\hat{x}, x_0]$ das größte links von x_0 liegende linksoffene Intervall ist, auf dem die Lösung existiert.) Die Lösung kann also immer soweit fortgesetzt werden, bis sie an den Rand von G stößt.

Beweis. a) Da G offen ist, existiert ein $r > 0$ mit

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^m : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\} \subset G.$$

In U erfüllt f eine Lipschitzbedingung bezüglich y mit einer Lipschitzkonstanten $L = L(U)$. Da f stetig ist, existiert ein $M \geq 0$ mit

$$|f(x, y)| \leq M \quad \text{für } (x, y) \in U.$$

Sei

$$\varepsilon := \min \left\{ r, \frac{r}{M} \right\}, \quad I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

(Zur Wahl von ε : Der Betrag (die Norm) der Ableitung einer Lösung y in U ist höchstens M , und das Intervall I ist so klein gewählt, dass eine Kurve, die in (x_0, y_0) beginnt und immer maximale Ableitung hat, den Rand von U frühestens in den Randpunkten von I erreicht.)

Eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ löst offenbar genau dann das Anfangswertproblem (AWP), wenn die Integralgleichung

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt, \quad x \in I$$

gilt. Zur Lösung dieser Integralgleichung benutzt man das Iterationsverfahren von Picard:

$$y_0(x) = y_0 \quad \text{für alle } x \in I,$$

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, x \in I.$$

Wir zeigen: Die Folge (y_k) ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auf ganz I definiert und konvergiert auf I gleichmäßig gegen eine Lösung der Integralgleichung (und damit des AWP).

(i) Alle y_k sind auf ganz I geeignet definiert, in dem Sinne dass $I \times y_k(I) \subset U$: Dafür genügt es, induktiv zu zeigen:

$$|y_k(x) - y_0| \leq r \quad \text{für alle } x \in I, k \in \mathbb{N}_0.$$

Induktionsanfang ($k = 0$): Dies ist klar, da $y_0(x) = y_0$ gilt.

Induktionsschritt ($k \Rightarrow k+1$): Sei $|y_k(x) - y_0| \leq r$ für alle $x \in I$. Dann folgt aus der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_k(t))| dt \\ &\leq M\varepsilon \leq r. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt:

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{für alle } x \in I, k \in \mathbb{N}_0.$$

Induktionsanfang ($k=0$):

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq M|x - x_0| = \frac{ML^0 |x - x_0|^1}{1!}.$$

Induktionsschritt ($k \Rightarrow k+1$):

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))] dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x L|y_k(t) - y_{k-1}(t)| dt \\ &\leq L \cdot \frac{ML^{k-1}}{k!} \int_{x_0}^x |t - x_0|^k dt \\ &= \frac{ML^k |x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

(iii) Gleichmäßige Konvergenz der Folge (y_k) auf I : Aus (ii) folgt

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq \frac{ML^k \varepsilon^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{für alle } x \in I, k \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y_{k+1}(x) - y_k(x)|$$

in I gleichmäßig konvergent.

Somit existiert im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz:

$$y(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} y_{k+1}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^k (y_{\ell+1}(x) - y_{\ell}(x)) + y_0 = y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (y_{k+1}(x) - y_k(x)),$$

und $y(\cdot)$ ist stetig in I .

(iv) $y(\cdot)$ ist Lösung der Integralgleichung: Wegen

$$|f(x, y(x)) - f(x, y_k(x))| \leq L|y(x) - y_k(x)|$$

folgt durch den Limes $k \rightarrow \infty$, dass

$$f(x, y_k(x)) \rightarrow f(x, y(x)) \quad \text{gleichmäßig auf } I.$$

Also konvergieren auch die Integrale

$$\int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt \rightarrow \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Da

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$$

und $y_{k+1}(x) \rightarrow y(x)$, folgt schließlich:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Damit ist y Lösung der Anfangswertaufgabe (AWP).

b) Nehmen wir an, dass die Behauptung nicht gilt. Dann existiert ein Kompaktum $K \subset G$ und eine Folge $x_n \in [x_0, \hat{x})$ mit $x_n \rightarrow \hat{x}$ und $(x_n, y(x_n)) \in K$ für alle n .

Also gibt es eine Teilfolge $(\tilde{x}_n)$ von (x_n) mit

$$(\tilde{x}_n, y(\tilde{x}_n)) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) \in K.$$

Ist $\varepsilon = \varepsilon(\hat{x}, \hat{y}) > 0$ für $(\hat{x}, \hat{y})$ so definiert wie in Teil a) die Zahl $\varepsilon(x_0, y_0)$ für (x_0, y_0) , so ist für hinreichend große n das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(\tilde{x}_n) = y_n$$

mindestens in $[\tilde{x}_n, \tilde{x}_n + \varepsilon/2]$ lösbar, und somit ist y über $\hat{x}$ hinaus fortsetzbar — ein Widerspruch. ■

Über den maximalen Definitionsbereich der Lösungen:

Satz 2.2.7. a) Sei

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b\}$$

und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bezüglich y . Ist

$$M := \max \{|f(x, y)| : (x, y) \in G\}, \quad \alpha := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

so ist das Anfangswertproblem (AWP) auf $[x_0, x_0 + \alpha]$ eindeutig lösbar. Entsprechendes gilt für ein Intervall links von x_0 .

b) Sei

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : x_0 \leq x \leq x_0 + a\}$$

ein Streifen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, und erfülle f eine Lipschitzbedingung bezüglich y , so ist das AWP auf ganz $[x_0, x_0 + a]$ eindeutig lösbar. Entsprechendes gilt für einen Streifen links von x_0 .

(Eigentlich wird nur eine lokale Lipschitzbedingung und die Abschätzung $|f(x, y)| \leq M_0 + L|y|$ benutzt.)

c) Ist $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, und erfüllt f eine Lipschitzbedingung bezüglich y , so ist das AWP auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutig lösbar. Entsprechendes gilt für den Halbraum $\mathbb{R} \times [x_0, \infty)$ bzw. $\mathbb{R} \times (-\infty, x_0]$.

Beweis. Wegen $|y'(x)| \leq M$ stößt die Lösung frühestens bei $x_0 + a$ oder $x_0 + \frac{b}{M}$ an den Rand von G , je nachdem, welches der kleinere Wert ist. Mit Teil b) des Satzes von Picard-Lindelöf folgt so die Behauptung.

b) Mit $M_0 := \max \{|f(x, 0)| : x_0 \leq x \leq x_0 + a\}$ gilt

$$|f(x, y)| \leq M_0 + L|y|.$$

Für $g(x) := \sqrt{1 + |y(x)|^2}$ ergibt sich

$$g'(x) = \frac{1}{g(x)} \langle y(x), y'(x) \rangle \leq \frac{1}{g(x)} |y(x)| \cdot |f(x, y(x))|.$$

Aufgrund der Lipschitzbedingung mit Konstanten $L > 0$ gilt offenbar

$$\frac{1}{g(x)} |y(x)| \cdot |f(x, y(x))| \leq |f(x, y(x))| \leq M_0 + L|y(x)| \leq C_1 g(x),$$

wobei C_1 eine geeignete Konstante ist (etwa $L + M_0$). Daraus folgt

$$|y(x)| \leq g(x) \leq C_2 e^{C_1 x}$$

in dem Bereich, in dem y existiert. Also kann die Lösung den Rand des Streifens frühestens bei $x_0 + a$ erreichen.

c) Dies folgt aus b), da die Lösung auf jedem Streifen rechts von x_0 existiert. ■

Völlig analoge Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für AWP von Systemen k -ter Ordnung

$$y^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}), \quad y^{(j)}(x_0) = y_j^0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, k-1,$$

mit $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{km}$ offen, folgen aus den obigen Resultaten, wenn man benutzt, dass dieses AWP äquivalent ist zum AWP *erster* Ordnung für $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{k-1})$:

$$Y' = \tilde{f}(x, Y), \quad Y(x_0) = (y_0^0, y_1^0, \dots, y_{k-1}^0),$$

wobei $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^{mk+m}$ definiert ist durch:

$$\tilde{f}(x, Y) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ f(x, y_0, \dots, y_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

2.3. Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung. In diesem Abschnitt betrachten wir Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = A(x)y + b(x) \quad (x \in J \subset \mathbb{R}),$$

mit einem beliebigen Intervall $J \subset \mathbb{R}$ und stetigen Funktionen

$$A : J \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad b : J \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Gesucht sind also stetig differenzierbare Lösungen

$$y = (y_1, \dots, y_m)^t : J \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Ausführlich geschrieben lautet das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \sum_{k=1}^m a_{1k}(x)y_k(x) + b_1(x), \\ y_2'(x) &= \sum_{k=1}^m a_{2k}(x)y_k(x) + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_m'(x) &= \sum_{k=1}^m a_{mk}(x)y_k(x) + b_m(x), \end{aligned}$$

bzw. abgekürzt

$$y_j'(x) = \sum_{k=1}^m a_{jk}(x)y_k(x) + b_j(x) \quad \text{für } j = 1, \dots, m.$$

Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall, in welchem $A(\cdot)$ tatsächlich von x abhängt und untersuchen dann den Fall, in dem $A(\cdot)$ konstant ist (konstante Koeffizienten).

Satz 2.3.1. *Sei $x_0 \in J$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$. Dann ist das AWP*

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y^0$$

in ganz J eindeutig lösbar.

Beweis. Wir zeigen: Ist J_0 ein kompaktes Teilintervall von J und

$$G_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : x \in J_0\} \subset G := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : x \in J\},$$

so erfüllt die rechte Seite

$$f(x, y) := A(x)y + b(x)$$

in G_0 eine Lipschitzbedingung bzgl y (und dann f auch in G eine lokal Lipschitzbedingung). Es gilt:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = |A(x)(y - \tilde{y})|.$$

Nun verwenden wir die Komponentenweise Abschätzung:

$$\begin{aligned} |A(x)(y - \tilde{y})| &= \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^m a_{jk}(x)(y_k - \tilde{y}_k) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m |a_{jk}(x)| \cdot |y_k - \tilde{y}_k| \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit

$$L' := \max \{|a_{jk}(x)| : 1 \leq j, k \leq m, x \in J_0\}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
 |f(x, y) - f(x, \tilde{y})| &\leq L' \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m |y_k - \tilde{y}_k| \right)^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq L' \left(\sum_{j=1}^m \left(m \sum_{k=1}^m |y_k - \tilde{y}_k|^2 \right) \right)^{1/2} \\
 &= mL' \left(\sum_{k=1}^m |y_k - \tilde{y}_k|^2 \right)^{1/2} = mL' |y - \tilde{y}|.
 \end{aligned}$$

Aus Satz Theorem 2.2.7 b) folgt, dass das AWP auf ganz J_0 eindeutig lösbar ist. Da J_0 ein beliebiges kompaktes Teilintervall von J ist, folgt damit die Behauptung. ■

Es folgen nun einige Resultate für das homogene System.

Satz 2.3.2. *Das $\mathbb{R}^{m \times m}$ -wertige AWP*

$$Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = E_m$$

besitzt für jedes $x_0 \in J$ genau eine Lösung $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$. Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ist

$$y(x) := Y(x)y_0$$

die eindeutig bestimmte Lösung des AWP

$$y' = A(x)y, \quad y(x_0) = y_0.$$

Die Matrix-Funktion $Y(\cdot)$ heißt die Lösungsmatrix des Systems zum Anfangspunkt x_0 . Für jedes $x \in J$ ist $Y(x)$ invertierbar.

Beweis. Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $y_j(\cdot)$ die (eindeutig bestimmte) Lösung des AWP

$$y'_j = A(x)y_j, \quad y_j(x_0) = e_j = (\delta_{1j}, \dots, \delta_{mj})^t.$$

Dann erfüllt die Matrix $Y(x)$ gegeben durch die Spalten $y_j(x)$, also

$$Y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \end{pmatrix},$$

das Gewünschte. Zur Invertierbarkeit: Angenommen, $Y(x_1)$ wäre nicht invertierbar für ein $x_1 \in J$. Dann gibt es ein $y_0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ mit

$$Y(x_1)y_0 = 0.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y, \quad y(x_0) = y_0$$

erfüllt also bei x_1 die Anfangsbedingung $y(x_1) = 0$ und ist somit (nach dem Eindeutigkeitsatz) identisch gleich Null, im Widerspruch zu $y(x_0) = y_0 \neq 0$. ■

Die Lösungsmatrix ermöglicht es also, sich nur auf Anfangspunkte x_0 zu beschränken: Alle Anfangswertprobleme der Art $y(x_0) = y^0$ werden dann einfach durch Multiplikation mit der Lösungsmatrix mit y^0 gelöst.

Lemma 2.3.3. Sei $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ stetig differenzierbar und $Y(x)$ invertierbar für alle $x \in J$. Dann ist $Z(\cdot) := Y(\cdot)^{-1}$ in J stetig differenzierbar mit

$$Z'(x) = -Z(x)Y'(x)Z(x) = -Y(x)^{-1}Y'(x)Y(x)^{-1}.$$

3

Beweis. Wir beweisen zunächst die Stetigkeit von $Z : J \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$. Nach der Cramerschen Regel hat jedes Matricelement von $Z(\cdot)$ die Form:

$$(\det Y(\cdot))^{-1} \times \{\text{Polynom in den Matricelementen von } Y(\cdot)\}.$$

Also ist jedes Matricelement von $Z(\cdot)$, und somit $Z(\cdot)$ selbst, stetig.

Damit folgt auch leicht die Differenzierbarkeit und die Formel für die Ableitung:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} Z(x+h) \cdot \frac{Y(x) - Y(x+h)}{h} \cdot Z(x) \\ &= -Z(x)Y'(x)Z(x). \end{aligned}$$

■

Korollar 2.3.4. Ist $Y(\cdot)$ die Lösungsmatrix von $y' = A(x)y$ zum Anfangspunkt x_0 , so ist $(Y(\cdot)^{-1})^t$ die Lösungsmatrix des transponierten Systems $y' = -A(x)^t y$ zum Anfangspunkt x_0 . Dabei ist A^t die zu A transponierte Matrix⁴

Beweis. Sei wieder $Z(\cdot) := Y(\cdot)^{-1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (Z(x)^t)' &= Z'(x)^t = (-Z(x)Y'(x)Z(x))^t \\ &= (-Z(x)A(x)Y(x)Z(x))^t = (-Z(x)A(x))^t = -A(x)^t Z(x)^t. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$Z(x_0)^t = (Y(x_0)^{-1})^t = E^t = E.$$

■

Für das *homogene* System 1. Ordnung $y' = A(x)y$ heißt ein System von m Funktionen $z^1, \dots, z^m : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein *Fundamentalsystem* dieser DGL, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- die Funktionen $z^1, \dots, z^m$ sind Lösungen der Differentialgleichung,

³Man vergleiche die obige Formel mit der Formel für die Ableitung der Inversen einer reellwertigen Funktion $(\frac{1}{y})'(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)^2}$.

⁴es gilt offenbar

$$(AB)^t = B^t A^t, \quad A'(x)^t = (A(x)^t)'.$$

- die Funktionen $z^1, \dots, z^m$ sind punktweise linear unabhängig in J , d.h. aus

$$\sum_{j=1}^m c_j z^j(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in J$$

folgt $c_j = 0$ für $j = 1, \dots, m$.

Lemma 2.3.5. *Lösungen $z^1, \dots, z^m$ von $y' = A(x)y$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem dieser DGL, wenn ein $x^* \in J$ existiert, so dass die Vektoren $z^1(x^*), \dots, z^m(x^*)$ in $\mathbb{R}^m$ linear unabhängig sind.*

Beweis. Übung. ■

Satz 2.3.6. *Sei $z^1, \dots, z^m$ ein Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$ und sei $Z(x)$ die Matrix mit den Spalten*

$$Z := \begin{pmatrix} z^1 & z^2 & \dots & z^m \end{pmatrix}.$$

Dann ist $Z(x)$ für jedes $x \in J$ invertierbar und es gilt

$$Z(x) = Y(x)Z(x_0), \quad Y(x) = Z(x)Z(x_0)^{-1},$$

wobei $Y(\cdot)$ die Lösungsmatrix zum Anfangspunkt x_0 ist.

Beweis. Es gilt offenbar (wie für jede Lösung der DGL)

$$z^j(x) = Y(x)z^j(x_0),$$

woraus sofort die erste Gleichung folgt.

$$Z(x) = Y(x)Z(x_0).$$

Da $z^1, \dots, z^m$ ein Fundamentalsystem ist, ist die Matrix $Z(x)$ invertierbar für jedes $x \in J$. Multiplikation der eben bewiesenen Identität mit $Z(x_0)^{-1}$ von rechts ergibt

$$Z(x)Z(x_0)^{-1} = Y(x),$$

die zweite gewünschte Gleichung. ■

Fundamentalsysteme erlauben es also sogar, die DGL komplett entkoppelt von Anfangswertaufgaben zu untersuchen: Man erhält so alle Lösungsmatrizen und somit die Lösungen aller Anfangswertaufgaben! Tatsächlich sagt der obige Satz, dass die Kenntnis der Lösungsmatrix zu einem Anfangspunkt äquivalent zur Kenntnis eines Fundamentalsystems und somit aller Lösungsmatrizen ist.

Wir erhalten folgende Struktur des Lösungsraumes von Systemen von *homogenen* DGLs:

Korollar 2.3.7. *Sei $z^1, \dots, z^m$ ein Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$ und sei $Z(x)$ die Matrix mit den Spalten*

$$Z := \begin{pmatrix} z^1 & z^2 & \dots & z^m \end{pmatrix}.$$

Dann ist jede Lösung $y(\cdot)$ dieser DGL eine Linearkombination der Funktionen $z^1, \dots, z^m$.
Genauer: Für alle $x \in J$ gilt

$$y(x) = Y(x)y(0) = Z(x)Z(x_0)^{-1}y(x_0) = Z(x) \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m t_j z^j(x),$$

wobei x_0 beliebig und t_j die j -te Komponente von $Z(x_0)^{-1}y(x_0)$ ist. Die Menge der Lösungen bildet also einen m -dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$. Jedes Fundamentalsystem ist eine Basis dieses Raumes.

Wir betrachten nun wieder inhomogene Systeme:

Satz 2.3.8. Sei $z^1, \dots, z^m$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $y' = A(x)y$, und sei $\hat{y}$ eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems $y' = A(x)y + b(x)$. Dann hat jede Lösung $\tilde{y}(\cdot)$ des inhomogenen Systems die Gestalt

$$\tilde{y}(x) = \hat{y}(x) + \sum_{j=1}^m c_j z_j(x), \quad \text{mit geeigneten } c_j \in \mathbb{R}, \quad \text{für alle } x \in J.$$

Genauer gilt

$$(19) \quad \tilde{y}(x) = \hat{y}(x) + Z(x)Z(x_0)^{-1}(\tilde{y}(x_0) - \hat{y}(x_0)) \quad \text{für alle } x \in J,$$

wobei x_0 beliebig und $Z(x)$ die Matrix mit den Spalten

$$Z := \begin{pmatrix} z^1 & z^2 & \dots & z^m \end{pmatrix}$$

ist.

Beweis. Da $Z(x)Z(x_0)^{-1}$ die Lösungsmatrix des homogenen Systems ist, ist klar, dass die rechte Seite $w(x)$ von (19) die inhomogene Gleichung löst. Weiter gilt:

$$w(x_0) = \hat{y}(x_0) + Z(x_0)Z(x_0)^{-1}(\tilde{y}(x_0) - \hat{y}(x_0)) = \tilde{y}(x_0),$$

d. h., wegen des Eindeutigkeitsatzes gilt $w = \tilde{y}$. Da

$$Z(x)Z(x_0)^{-1}(\tilde{y}(x_0) - \hat{y}(x_0))$$

eine Linearkombination der $z^1, \dots, z^m$ ist, ist damit alles gezeigt. ■

Konkret lassen sich die Lösungen von Anfangswertaufgaben bei Kenntnis der Lösungsmatrix wie folgt berechnen:

Satz 2.3.9. Die eindeutig bestimmte Lösung $y(\cdot)$ des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y^0$$

ist gegeben durch

$$y(x) = Y(x)y_0 + Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt,$$

wobei $Y(\cdot)$ die Lösungsmatrix des homogenen Systems zum Anfangspunkt x_0 ist.

Beweis. Es gilt offenbar

$$y(x_0) = Y(x_0)y^0 + Y(x_0) \int_{x_0}^{x_0} Y(t)^{-1}b(t) dt = Y(x_0)y^0 + Y(x_0) \cdot 0 = y^0.$$

Außerdem,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{d}{dx} \left(Y(x)y^0 + Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt \right) \\ &= Y'(x)y^0 + Y'(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt + Y(x) \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt \right) \\ &= Y'(x) \left(y^0 + \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt \right) + Y(x)Y(x)^{-1}b(x) \\ &= A(x)Y(x) \left(y^0 + \int_{x_0}^x Y(t)^{-1}b(t) dt \right) + b(x) \\ &= A(x)y(x) + b(x), \end{aligned}$$

da $Y'(x) = A(x)Y(x)$ gilt. ■

Im Allgemeinen ist es schwierig, eine Lösungsmatrix zu ermitteln. Einfacher ist es, sich den Fall einer *konstanten* Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ anzusehen. In der Übung wird bewiesen, dass für fixiertes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Matrixreihe

$$\exp((x - x_0)A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j A^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(xA)^j}{j!}$$

lokal gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ gegen die Lösungsmatrix $Y(x)$ von $y' = Ay$ zum Startpunkt x_0 konvergiert. Wie im reellen Fall beweist man, dass im Falle von kommutierenden Matrizen die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt; insbesondere sind Matrixexponentiale stets invertierbar und es gilt

$$\exp((x - x_0)A) = \exp(xA) \exp(-x_0A),$$

d.h. die Spalten von $\exp(xA)$ bilden ein Fundamentalsystem.

Zur Berechnung von $\exp(xA)$:

Es sei daran erinnert, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn es eine Basis $v^1, \dots, v^m \in \mathbb{R}^m$ aus Eigenvektoren von A gibt (dies ist erfüllt, z.B. wenn $A = A^t$ oder wenn es m viele voneinander verschiedene Eigenwerte von A gib). Ist dann $M \in \mathbb{R}^m$ dadurch definiert, dass die i -te Spalte von M durch v_i gegeben ist, so ist M invertierbar und es gilt

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ den Eigenwerten von A . Es gilt

$$A^j = M \begin{pmatrix} \lambda_1^j & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^j \end{pmatrix} M^{-1},$$

also

$$\exp(xA) = M \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_m x} \end{pmatrix} M^{-1}.$$

Im diagonalisierbaren Fall ist eine Fundamentalmatrix (also eine Matrix deren Zeilen ein Fundamentalsystem bilden) leicht zu ermitteln. Ist A symmetrisch und sind die v_i sogar eine Orthonormalbasis, so ist M sogar unitär, also $M^{-1} = M^*$ (transponieren und Einträge komplex konjugieren).

Beispiel 2.3.10. Wir wählen die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist (Entwickeln nach erster Spalte)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) \\ &= (2-\lambda)(3-4\lambda-\lambda^2) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3). \end{aligned}$$

und man erhält so die Eigenwerte $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, 3$.

Zum ersten Eigenwert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} v = 0,$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0,$$

was zum Eigenvektor $v^1 = (0, -1, 1)^t$ führt.

Zum zweiten Eigenwert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} v = 0,$$

was zum Eigenvektor $v^2 = (1, 0, 0)^t$ führt.

Zum dritten Eigenwert:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} v = 0,$$

was zum Eigenvektor $v^3 = (0, 1, 1)^t$ führt.

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix sind orthogonal. Normiert man diese Vektoren so bekommt man die ONB aus Eigenvektoren

$$w^1 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t, \quad w^2 = (1, 0, 0)^t, \quad w^3 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^t.$$

Die Inverse der unitären Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ist somit

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \exp(xA) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & & \\ & e^{2x} & \\ & & e^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^x + e^{3x}}{2} & \frac{-e^x + e^{3x}}{2} \\ 0 & \frac{-e^x + e^{3x}}{2} & \frac{e^x + e^{3x}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung des AWP $y' = Ay$, $y(x_0) = y^0 \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$y(x) = \exp((x - x_0)A)y^0 = \begin{pmatrix} e^{2(x-x_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{(x-x_0)} + e^{3(x-x_0)}}{2} & \frac{-e^{(x-x_0)} + e^{3(x-x_0)}}{2} \\ 0 & \frac{-e^{(x-x_0)} + e^{3(x-x_0)}}{2} & \frac{e^{(x-x_0)} + e^{3(x-x_0)}}{2} \end{pmatrix} y_0.$$

2.4. Lineare DGLs m -ter Ordnung. Eine *lineare (explizite, skalare) Differentialgleichung der Ordnung k* hat die Gestalt

$$y^{(k)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + b(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x)y^{(j)} + b(x),$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a_j : J \rightarrow \mathbb{R}$ und einer stetigen Inhomogenität (oder Störterm) $b : J \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Ist $b \equiv 0$, so heißt die DGL

natürlich homogen.

Zunächst ist die Existenz- und Eindeigkeitstheorie äquivalent zu der Theorie des vergangenen Abschnitts von linearen Systemen erster Ordnung: Mit der vektorwertigen Funktion

$$\underline{y}(x) := \begin{pmatrix} \underline{y}^0(x) \\ \underline{y}^1(x) \\ \vdots \\ \underline{y}^{k-1}(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x) \end{pmatrix},$$

ist die DGL äquivalent zum System erster Ordnung

$$\begin{aligned} (\underline{y}^0)' &= \underline{y}^1, \\ (\underline{y}^1)' &= \underline{y}^2, \\ &\vdots \\ (\underline{y}^{k-2})' &= \underline{y}^{k-1}, \\ (\underline{y}^{k-1})' &= a_0(x)\underline{y}^0 + \cdots + a_{k-1}(x)\underline{y}^{k-1} + b(x), \end{aligned}$$

oder kürzer, in Matrix-Schreibweise:

$$\underline{y}' = A(x)\underline{y} + \underline{b}(x)$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) & \cdots & \cdots & a_{k-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \underline{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Zu jedem $x_0 \in J$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösungsmatrix $Y(\cdot)$, definiert als die eindeutige Lösung des Matrix-Anfangswertproblems

$$\text{AWP: } Y' = A(x)Y, \quad Y(x_0) = E_k.$$

Mit dieser Lösungsmatrix $Y(\cdot)$ ist dann für jedes Anfangswertproblem

$$\text{AWP: } \underline{y}' = A(x)\underline{y} + b(x), \quad \underline{y}(x_0) = \underline{y}^0 \in \mathbb{R}^k$$

die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$\underline{y}(x) = Y(x)\underline{y}^0 + Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1} b(t) dt.$$

Durch Betrachtung der ersten Komponente erhalten wir direkt:

Satz 2.4.1. *Sei $x_0 \in J$ und $y^0, \dots, y^{k-1} \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + b(x), \\ y(x_0) &= y^0, \quad y'(x_0) = y^1, \quad \dots, \quad y^{(k-1)}(x_0) = y^{k-1} \end{aligned}$$

auf J genau Lösung.

Lösungen $z^1, \dots, z^k : J \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen DGL

$$y^{(k)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{k-1}(x)y^{(k-1)},$$

heißen analog zu oben ein *Fundamentalsystem*, wenn

$$\text{aus } c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{j=1}^k c_j z^j(x) \equiv 0 \text{ für alle } x \in J \text{ folgt } c_1 = \dots = c_k = 0.$$

Dies äquivalent dazu, dass $\{\underline{z}^1, \dots, \underline{z}^k\}$ mit

$$\underline{z}^j := \left(z^j, (z^j)', \dots, (z^j)^{(k-1)} \right)^t$$

ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $\underline{y}' = A(x)\underline{y}$ ist, wobei $A(x)$ wie oben definiert ist. Es gilt nämlich:

$$\sum_{j=1}^k c_j z^j(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in J$$

genau dann, wenn

$$\sum_{j=1}^k c_j (z^j)^{(i)}(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in J \text{ und } i \in \{0, \dots, k-1\}$$

gilt.

Satz 2.4.2. *Ist $z^1, \dots, z^k$ ein Fundamentalsystem von*

$$(20) \quad y^{(k)} = a_0(x)y + \dots + a_{k-1}(x)y^{(k-1)},$$

so ist jede Lösung dieser Gleichung eindeutig darstellbar als $\mathbb{R}$ -Linearkombination von $z^1, \dots, z^k$. Die Menge der Lösungen einer homogenen linearen DGL k -ter Ordnung bildet also einen k -dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Beweis. Da

$$Z := \begin{pmatrix} \underline{z}^1 & \underline{z}^2 & \dots & \underline{z}^k \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von $\underline{y}' = A(x)\underline{y}$ ist, ist jede Lösung dieses Systems erster Ordnung eine eindeutige Linearkombination der Spalten von Z . Damit ist jede Lösung von (20) eine eindeutige $\mathbb{R}$ -Linearkombination von $z^1, \dots, z^k$. ■

Für $k-1$ mal stetig differenzierbare Funktionen $z^1, \dots, z^k : J \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Wronski-Determinante definiert durch

$$W(z_1, \dots, z_k; x) := \det \begin{pmatrix} z^1(x) & z^2(x) & \dots & z^k(x) \\ (z^1)'(x) & (z^2)'(x) & \dots & (z^k)'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^1)^{(k-1)}(x) & (z^2)^{(k-1)}(x) & \dots & (z^k)^{(k-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Für diese Wronski-Determinante gilt:

Satz 2.4.3. Seien $z^1, \dots, z^k$ Lösungen der homogenen Differenzialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(k)} = a_0(x)y + \dots + a_{k-1}(x)y^{(k-1)}, \quad x \in J,$$

und $W(x) := W(z^1, \dots, z^k; x)$. Dann gilt

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x a_{k-1}(s) ds \right) \quad \text{für alle } x_0, x \in J.$$

Außerdem sind folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\{z^1, \dots, z^k\}$ ist ein Fundamentalsystem,
- (ii) $W(x) \neq 0$ für ein $x \in J$,
- (iii) $W(x) \neq 0$ für alle $x \in J$.

Beweis. Aus der (gewöhnlichen) Produktregel und der Leibnizschen Formel ergibt sich, dass die Ableitung einer Determinanten Funktion $x \mapsto \det(A(x))$ gegeben ist als

$$(d/dx) \det(A(\cdot)) = \sum_{j=1}^k \det(A_j(\cdot)),$$

wobei $A_j(\cdot)$ die Matrix bezeichnet, deren j -te Zeile durch die Ableitung der j -ten Zeile von $A(\cdot)$ gegeben ist, und die anderen Zeilen gleich den anderen Zeilen von $A(\cdot)$ sind. Das liefert in diesem Fall

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} z^1(x) & z^2(x) & \dots & z^k(x) \\ (z^1)'(x) & (z^2)'(x) & \dots & (z^k)'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^1)^{(k-2)}(x) & (z^2)^{(k-2)}(x) & \dots & (z^k)^{(k-2)}(x) \\ (z^1)^{(k-1)}(x) & (z^2)^{(k-1)}(x) & \dots & (z^k)^{(k-1)}(x) \end{pmatrix},$$

denn alle anderen Summanden verschwinden, da die entsprechenden Matrizen jeweils zwei identische Zeilen enthalten. In der letzten Zeile kann man nun aufgrund der Differentialgleichung ersetzen:

$$(z^j)^{(k)}(x) = a_0(x)z^j(x) + a_1(x)(z^j)'(x) + \dots + a_{k-1}(x)(z^j)^{(k-1)}(x).$$

Aufgrund der Linearität (bezüglich der Zeilen) der Determinante ist also die obige Determinante gleich einer Summe von Determinanten, in der wieder nur ein Summand überlebt, und man erhält

$$W'(x) = \det \begin{pmatrix} z^1(x) & \dots & z^k(x) \\ (z^1)'(x) & \dots & (z^k)'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^1)^{(k-2)}(x) & \dots & (z^k)^{(k-2)}(x) \\ a_{k-1}(x)(z^1)^{(k-1)}(x) & \dots & a_{k-1}(x)(z^k)^{(k-1)}(x) \end{pmatrix} = a_{k-1}(x)W(x).$$

Daraus folgt die behauptete Formel durch Integration. Diese Formel liefert auch die Äquivalenz von (ii) und (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii): Wenn (ii) nicht gilt, gibt es ein $x_0 \in J$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit $(c_1, \dots, c_k) \neq (0, \dots, 0)$ und

$$\sum_{j=1}^k c_j (z^j)^{(i)}(x_0) = 0 \quad \text{für } i = 0, \dots, k-1.$$

Dann ist aber $y(x) := \sum_{j=1}^k c_j (z^j)^{(i)}(x)$ die Lösung des homogenen Anfangswertproblems mit Anfangspunkt x_0 und Anfangswerten $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(k-1)}(x_0) = 0$, also $y(\cdot) \equiv 0$. Das heißt aber, dass $z^1, \dots, z^k$ linear abhängig ist, im Widerspruch zu (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wenn (i) nicht gilt, gibt es $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ mit $(c_1, \dots, c_k) \neq (0, \dots, 0)$ und

$$\sum_{j=1}^k c_j z^j(\cdot) \equiv 0.$$

Dann ist aber auch

$$\sum_{j=1}^k c_j (z^j)^{(i)}(\cdot) \equiv 0 \quad \text{für alle } i = 0, \dots, k-1,$$

und somit $W(\cdot) = 0$, im Widerspruch zu (ii). ■

Damit haben wir alle Vorbereitungen, um auch die inhomogene Gleichung zu lösen:

Satz 2.4.4. Sei $z^1, \dots, z^k$ ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(k)} = a_0(x)y + \dots + a_{k-1}(x)y^{(k-1)},$$

$W(x) := W(z^1, \dots, z^k; x)$ die Wronski-Determinante,

$$K(x, t) := \frac{1}{W(t)} \det \begin{pmatrix} z^1(t) & \dots & z^k(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^1)^{(k-2)}(t) & \dots & (z^k)^{(k-2)}(t) \\ z^1(x) & \dots & z^k(x) \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$y(x) := \int_{x_0}^x K(x, t) b(t) dt$$

die (eindeutig bestimmte) Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y^{(k)} = a_0(x)y + \dots + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + b(x)$$

mit den Anfangswerten

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Die Lösung zu beliebigen Anfangswerten

$$y(x_0) = y^0, \quad \dots, \quad y^{(k-1)}(x_0) = y^{k-1}$$

erhält man durch Addition der Lösung der homogenen Gleichung (Linearkombination der z^j), die diese Anfangsbedingungen erfüllt.

Beweis. Die gesuchte Lösung $y(\cdot)$ ist die erste Komponente der Lösung $y(\cdot)$ des zugehörigen Systems,

$$y(x) = \left(Y(x) \int_{x_0}^x Y(t)^{-1} \underline{b}(t) dt \right)_1,$$

siehe Betrachtungen vor Satz 2.4.1. Sei Z die Matrix, deren j -te Spalte gegeben ist durch

$$\left(z^j \quad (z^j)' \dots (z^j)^{(k-1)} \right)^T.$$

Dann gilt für die Lösungsmatrix

$$Y(x) = Z(x)Z(x_0)^{-1}, \quad Y(x)^{-1} = Z(x_0)Z(x)^{-1},$$

also

$$y(x) = Z(x)Z(x_0)^{-1} \int_{x_0}^x Z(x_0)Z(t)^{-1} \underline{b}(t) dt = Z(x) \int_{x_0}^x Z(t)^{-1} \underline{b}(t) dt.$$

Für den Vektor $Z(t)^{-1} \underline{b}(t)$ gilt nach der Cramer'schen Regel,

$$(Z(t)^{-1} \underline{b}(t))_j = \frac{1}{W(t)} \det \begin{pmatrix} z^1(t) & \dots & z^{j-1}(t) & 0 & z^{j+1}(t) & \dots & z^k(t) \\ (z^1)'(t) & \dots & (z^{j-1})'(t) & 0 & (z^{j+1})'(t) & \dots & (z^k)'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^1)^{(k-2)}(t) & \dots & (z^{j-1})^{(k-2)}(t) & 0 & (z^{j+1})^{(k-2)}(t) & \dots & (z^k)^{(k-2)}(t) \\ (z^1)^{(k-1)}(t) & \dots & (z^{j-1})^{(k-1)}(t) & b(t) & (z^{j+1})^{(k-1)}(t) & \dots & (z^k)^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}$$

(Entwicklung nach der j -ten Spalte)

$$= (-1)^{k+j} \frac{b(t)}{W(t)} \det \begin{pmatrix} z^1(t) & \dots & z^{j-1}(t) & z^{j+1}(t) & \dots & z^k(t) \\ (z^1)'(t) & \dots & (z^{j-1})'(t) & (z^{j+1})'(t) & \dots & (z^k)'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (z^1)^{(k-2)}(t) & \dots & (z^{j-1})^{(k-2)}(t) & (z^{j+1})^{(k-2)}(t) & \dots & (z^k)^{(k-2)}(t) \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$(Z(x)Z(t)^{-1} \underline{b}(t))_1 = \sum_{j=1}^k z^j(x) (Z(t)^{-1} \underline{b}(t))_j = \sum_{j=1}^k z^j(x) (-1)^{k+j} \frac{b(t)}{W(t)} \det(\dots),$$

und mit erneuter Anwendung des Entwicklungssatzes

$$= K(x, t) b(t).$$

Integration von x_0 bis x liefert die Behauptung. ■

2.5. Fundamentalsysteme im Falle konstanter Koeffizienten. Im Fall konstanter Koeffizienten ist es relativ leicht, ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung explizit anzugeben:

Sei L der Differentialoperator

$$Ly = y^{(k)} - a_{k-1}y^{(k-1)} - \dots - a_1y' - a_0y$$

mit Konstanten $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für Lösungen der homogenen DGL $Ly = 0$. Wir machen hierzu den Lösungsansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung liefert nach einer einfachen Rechnung

$$0 = L(e^{\lambda x}) = p(\lambda)e^{\lambda x},$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \dots - a_1\lambda - a_0.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt auch

$$p(\lambda) = (-1)^{k+1} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Es ist $y(x) = e^{\lambda x}$ genau dann eine Lösung der DGL, wenn λ eine Nullstelle von $p(\cdot)$ ist. Es ist allerdings noch zu beachten, dass solche Nullstellen i.A. komplex sind (siehe unten zu findende Bemerkung). Es gilt zunächst:

Satz 2.5.1. *Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ (!) die verschiedenen Nullstellen von $p(\cdot)$ mit Vielfachheiten $\nu_1, \dots, \nu_m$, d.h. $\sum_{j=1}^m \nu_j = k$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra. Dann ist ein komplexes Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Ly = 0$ gegeben durch*

$$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, \dots, x^{\nu_j-1}e^{\lambda_j x} \quad \text{für } j = 1, \dots, m.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst: Wenn λ_0 eine ν -fache Nullstelle von $p(\cdot)$ ist, dann sind

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{\nu-1}e^{\lambda_0 x}$$

Lösungen der Differentialgleichung. Sei zunächst λ beliebig. Aus der Gleichung $L(e^{\lambda x}) = p(\lambda)e^{\lambda x}$ folgt durch j -malige Differentiation nach λ ,

$$L(x^j e^{\lambda x}) = L\left(\frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} e^{\lambda x}\right) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} L(e^{\lambda x}) = \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} (p(\lambda)e^{\lambda x}).$$

Mit der Produktregel:

$$(fg)^{(j)} = \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} f^{(\ell)} g^{(j-\ell)} \Rightarrow \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} (p(\lambda)e^{\lambda x}) = \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} p^{(\ell)}(\lambda) x^{j-\ell} e^{\lambda x}.$$

Ist λ_0 eine ν -fache Nullstelle von p , also $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^\nu p_0(\lambda)$, so ist

$$p^{(\ell)}(\lambda_0) = 0 \quad \text{für } \ell = 0, \dots, \nu - 1,$$

und somit

$$L(x^j e^{\lambda_0 x}) = 0 \quad \text{für } j = 0, \dots, \nu - 1.$$

Es bleibt die lineare Unabhängigkeit der im Satz angegebenen Lösungen zu beweisen. Dazu nehmen wir an, dass gilt

$$\sum_{j=1}^m \nu_j \sum_{\ell=1}^{\nu_j} c_{j\ell} x^{\ell-1} e^{\lambda_j x} = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Es ist zu zeigen, dass dann alle $c_{j\ell}$ verschwinden.

Wir führen diesen Beweis durch Induktion nach m .

Induktionsanfang $m = 1$: Aufgrund der Annahme gilt dann

$$\sum_{\ell=1}^{\nu_1} c_{1\ell} x^{\ell-1} e^{\lambda_1 x} = 0 \quad \text{für alle } x,$$

also

$$\sum_{\ell=1}^{\nu_1} c_{1\ell} x^{\ell-1} = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Das ist aber nur möglich, wenn alle c_ℓ verschwinden (da nur das Nullpolynom für alle x verschwindet).

Induktionsschritt $m \rightarrow m + 1$:

Die Induktionsannahme – Gültigkeit der Behauptung für m verschiedene Nullstellen – kann wie folgt formuliert werden: Sind $q_j(\cdot)$ Polynome vom Grad $< \nu_j$ mit

$$\sum_{j=1}^m q_j(x) e^{\lambda_j x} = 0 \quad \text{für alle } x,$$

so gilt $q_j(x) \equiv 0$ für $j = 1, \dots, m$.

Aufgrund der obigen Annahme gilt mit geeigneten Polynomen $p_j(\cdot)$ vom Grad $< \nu_j$

$$\sum_{j=1}^{m+1} p_j(x) e^{\lambda_j x} = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Multiplikation mit $e^{-\lambda_{m+1}x}$ liefert

$$\sum_{j=1}^m p_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_{m+1})x} = -p_{m+1}(x) \quad \text{für alle } x.$$

Differenziert man diese Gleichung $\nu_{m+1} + 1$ -mal, so wird die rechte Seite Null. Mit Polynomen $P_j(\cdot)$ vom gleichen Grad wie $p_j(\cdot)$ (wobei das Nullpolynom vereinbarungsgemäß den Grad -1 hat), gilt dann

$$\sum_{j=1}^m P_j(x) e^{(\lambda_j - \lambda_{m+1})x} = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Die Induktionsannahme liefert dann $P_j(\cdot) = 0$ (d.h. $P_j \equiv 0$) für $j = 1, \dots, m$. Da die p_j den gleichen Grad wie P_j haben, folgt daraus $p_j(\cdot) = 0$ für $j = 1, \dots, m$ und mit obiger Gleichung auch $p_{m+1}(\cdot) = 0$.

