

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $l \geq 2$. Beweisen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O(l)$ aller $l \times l$ Matrizen A mit reellen Einträgen und $A^T A = E_l$ eine $\frac{1}{2}l(l-1)$ -dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{l^2} = \mathbb{R}^{l \times l}$ ist.

Aufgabe 2

Sei $l \geq 2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^{l-1} := \{x \in \mathbb{R}^l : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^l$ eine $(l-1)$ -dimensionale glatte UMF ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $M := \{x \in \mathbb{R}^l : |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^l$ eine l -dimensionale glatte UMF mit Rand ist.

Aufgabe 4

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine m -dimensionale glatte UMF des $\mathbb{R}^l$ mit Rand. Sei $a \in M$ und sei $\phi : U \rightarrow V$ eine extrinsische Karte bei a für M . Zeigen Sie, dass dann genau eine der beiden Bedingungen i) beziehungsweise ii) aus Definition 1.1.9 gilt.

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Sei $A \subset \mathbb{R}^l$ beliebig und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass zu jedem $a \in A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^l$ von a existiert, sodass $f|_{A \cap U}$ sich zu einer glatten Funktion auf U fortsetzen lässt. Dann ist f stetig, wenn A als metrischer Teilraum des $\mathbb{R}^l$ betrachtet wird.