

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 9

Aufgabe 1

Beweisen Sie das Lemma von Gronwall: Sei $J = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $v, w : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit

$$u'(t) \leq v(t)u(t) + w(t), \quad \text{für alle } t \in J.$$

Dann gilt

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t v(s) ds} + \int_a^t e^{\int_s^t v(r) dr} w(s) ds \quad \text{for all } t \in J.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie den Eindeutigkeitssatz für DGLs mittels des Lemmas von Gronwall. Hinweis: Für beliebiges $\alpha > 0$ betrachten Sie das kompakte Intervall $J := [x_0, x_0 + \alpha]$ und $u(t) := |y(t) - z(t)|^2$. Wie geht man links von x_0 vor?

Aufgabe 3

Lösen Sie die DGL

$$xe^{xy}y' + 2x + ye^{xy} = 0.$$

Aufgabe 4

Finden Sie einen integrierenden Faktor für die DGL

$$xyy' + \frac{1}{2}(xy^2 + y^2) = 0$$

und lösen Sie so diese DGL.