

Antwort 1

Gegeben sei die Ungleichung:

$$u'(t) \leq v(t)u(t) + w(t), \quad \text{für alle } t \in J = [a, b].$$

Multipliziere beide Seiten mit dem integrierenden Faktor $e^{-\int_a^t v(s)ds}$:

$$e^{-\int_a^t v(s)ds} u'(t) - v(t)e^{-\int_a^t v(s)ds} u(t) \leq e^{-\int_a^t v(s)ds} w(t).$$

Die linke Seite entspricht der Ableitung eines Produkts:

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\int_a^t v(s)ds} u(t) \right) \leq e^{-\int_a^t v(s)ds} w(t).$$

Integriere über das Intervall $[a, t]$:

$$e^{-\int_a^t v(s)ds} u(t) - u(a) \leq \int_a^t e^{-\int_a^s v(r)dr} w(s) ds.$$

Multipliziere beide Seiten mit $e^{\int_a^t v(s)ds}$:

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t v(s)ds} + \int_a^t e^{\int_a^t v(r)dr - \int_a^s v(r)dr} w(s) ds.$$

Vereinfache die Exponenten im Integral:

$$\int_a^t v(r)dr - \int_a^s v(r)dr = \int_s^t v(r)dr.$$

Damit ergibt sich die gewünschte Ungleichung:

$$u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t v(s)ds} + \int_a^t e^{\int_s^t v(r)dr} w(s) ds.$$

Antwort 2.

Seien $y(x)$, $z(x)$ zwei Lösungen. Da beide stetig sind, sind ihre Bilder $y([x_0, x_0 + \alpha])$ und $z([x_0, x_0 + \alpha])$ kompakt. Definiere die kompakten Mengen:

$$\begin{aligned} K_1 &:= [x_0, x_0 + \alpha] \times y([x_0, x_0 + \alpha]) \\ K_2 &:= [x_0, x_0 + \alpha] \times z([x_0, x_0 + \alpha]) \end{aligned}$$

Die Vereinigung $K := K_1 \cup K_2$ bleibt kompakt. Nach Voraussetzung existiert eine Lipschitz-Konstante $L > 0$ mit:

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z| \quad \forall (x, y), (x, z) \in K.$$

2. Eindeutigkeit auf $[x_0, x_0 + \alpha]$

Definiere die Differenzfunktion:

$$u(x) := |y(x) - z(x)|^2$$

Deren Ableitung erfüllt:

$$u'(x) = 2(y(x) - z(x))(f(x, y(x)) - f(x, z(x))) \leq L|y(x) - z(x)|^2 = Lu(x)$$

Gronwall-Lemma angewandt auf $u'(x) - Lu(x) \leq 0$ liefert:

$$u(x) \leq u(x_0)e^{L(x-x_0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv z \text{ auf } [x_0, x_0 + \alpha].$$

3. Eindeutigkeit auf $[x_0 - \alpha, x_0]$

Definiere für $t \in [x_0 - \alpha, x_0]$:

$$\tilde{t} := 2x_0 - t$$

$$\tilde{y}(\tilde{t}) := y(t), \quad \tilde{z}(\tilde{t}) := z(t)$$

$$\tilde{f}(\tilde{t}, \xi) := -f(2x_0 - \tilde{t}, \xi)$$

Analog zum rechten Intervall definieren wir:

$$\tilde{K}_1 := [x_0, x_0 + \alpha] \times \tilde{y}([x_0, x_0 + \alpha])$$

$$\tilde{K}_2 := [x_0, x_0 + \alpha] \times \tilde{z}([x_0, x_0 + \alpha])$$

Diese sind kompakt als stetige Bilder von $[x_0, x_0 + \alpha]$.

Da f auf K Lipschitz ist, gilt für $\tilde{f}$:

$$|\tilde{f}(\tilde{t}, \xi_1) - \tilde{f}(\tilde{t}, \xi_2)| = |f(2x_0 - \tilde{t}, \xi_1) - f(2x_0 - \tilde{t}, \xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|$$

Die ursprüngliche DGL transformiert sich zu:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{y}), \quad \tilde{y}(x_0) = y(x_0)$$

Definiere $\tilde{u}(\tilde{t}) := |\tilde{y}(\tilde{t}) - \tilde{z}(\tilde{t})|^2$. Wie im rechten Intervall:

$$\tilde{u}(\tilde{t}) \leq \tilde{u}(x_0)e^{L(\tilde{t}-x_0)} = 0 \quad (\text{da } \tilde{u}(x_0) = |y(x_0) - z(x_0)|^2 = 0)$$

Für $t \in [x_0 - \alpha, x_0]$ folgt:

$$y(t) = \tilde{y}(2x_0 - t) = \tilde{z}(2x_0 - t) = z(t)$$

Antwort 3

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$xe^{xy}y' + 2x + ye^{xy} = 0.$$

Wir definieren die Funktionen $h(x, y)$ und $g(x, y)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= xe^{xy}, & h_x(x, y) &= e^{xy} + xye^{xy}, \\ g(x, y) &= 2x + ye^{xy}, & g_y(x, y) &= e^{xy} + xye^{xy}. \end{aligned}$$

Da $h_x(x, y) = g_y(x, y)$ gilt, ist die Differentialgleichung exakt.

Somit lässt sich Satz 2.1.9 hier anwenden:

$$F(x, y) = y \int_0^1 h(tx, ty) dt + x \int_0^1 g(tx, ty) dt$$

$$h(tx, ty) = txe^{t^2xy}, \quad g(tx, ty) = 2tx + tye^{t^2xy}$$

$$\int_0^1 h(tx, ty) dt = \int_0^1 txe^{t^2xy} dt$$

Sei $u = t^2xy$, $du = 2txy dt$:

$$= \frac{1}{2y} (e^{xy} - 1)$$

$$\int_0^1 g(tx, ty) dt = 2x \int_0^1 t dt + y \int_0^1 te^{t^2xy} dt = x + \frac{e^{xy} - 1}{2x}$$

$$F(x, y) = y \left(\frac{e^{xy} - 1}{2y} \right) + x \left(x + \frac{e^{xy} - 1}{2x} \right) = x^2 + e^{xy} - 1$$

$$F(x, y) = x^2 + e^{xy} = C$$

$$y = \frac{1}{x} \ln(C - x^2)$$

wobei C eine beliebige reelle Konstante ist. Dies ist die allgemeine Lösung der gegebenen exakten Differentialgleichung.

Antwort 4

Gegeben ist die Differentialgleichung:

$$xyy' + \frac{1}{2}(xy^2 + y^2) = 0.$$

Definiere die Funktionen:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= xy, & h_x(x, y) &= y, \\ g(x, y) &= \frac{1}{2}(xy^2 + y^2), & g_y(x, y) &= (x + 1)y. \end{aligned}$$

Da $h_x(x, y) = y \neq (x+1)y = g_y(x, y)$, ist die Gleichung nicht exakt.
Berechne:

$$\frac{g_y - h_x}{h} = \frac{(x+1)y - y}{xy} = \frac{xy}{xy} = 1.$$

Da dies nur von x abhängt, ist der integrierende Faktor:

$$M(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

Multiplikation mit $M(x)$ ergibt:

$$xye^x y' + \frac{1}{2}(x+1)y^2 e^x = 0.$$

Nun gilt für die neuen Koeffizienten:

$$\tilde{h}(x, y) = xye^x, \quad \tilde{g}(x, y) = \frac{1}{2}(x+1)y^2 e^x$$

$$F(x, y) = y \int_0^1 \tilde{h}(tx, ty) dt + x \int_0^1 \tilde{g}(tx, ty) dt$$

$$\tilde{h}(tx, ty) = t^2 xye^{tx}$$

$$\int_0^1 \tilde{h}(tx, ty) dt = xy \int_0^1 t^2 e^{tx} dt$$

$$xy \int t^2 e^{tx} dt = xy \left(\frac{t^2 e^{tx}}{x} - \int \frac{2te^{tx}}{x} dt \right)$$

$$= yt^2 e^{tx} - 2y \int te^{tx} dt$$

$$-2y \int te^{tx} dt = -2y \left(\frac{te^{tx}}{x} - \int \frac{e^{tx}}{x} dt \right)$$

$$= -2y \left(\frac{te^{tx}}{x} - \frac{e^{tx}}{x^2} \right)$$

$$\int_0^1 \tilde{h}(tx, ty) dt = \left[yt^2 e^{tx} - 2y \left(\frac{te^{tx}}{x} - \frac{e^{tx}}{x^2} \right) \right]_0^1$$

$$= ye^x - 2y \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \right) - \frac{2y}{x^2}$$

$$\tilde{g}(tx, ty) = \frac{1}{2}(tx+1)t^2 y^2 e^{tx}$$

$$\int_0^1 \tilde{g}(tx, ty) dt = \frac{y^2}{2} \int_0^1 (tx+1)t^2 e^{tx} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^2}{2} \left(x \int_0^1 t^3 e^{tx} dt + \int_0^1 t^2 e^{tx} dt \right) \\
&\int_0^1 t^2 e^{tx} dt = \frac{t^2 e^{tx}}{x} - \frac{2}{x} \int_0^1 t e^{tx} dt \\
&= \frac{t^2 e^{tx}}{x} - \frac{2}{x} \left(\frac{t e^{tx}}{x} - \frac{e^{tx}}{x^2} \right) \\
&= e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) - \frac{2}{x^3} \\
&\int_0^1 t^3 e^{tx} dt = \frac{t^3 e^{tx}}{x} - \frac{3}{x} \int_0^1 t^2 e^{tx} dt \\
&= e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) + \frac{6}{x^4} \\
&F(x, y) = xy^2 e^x
\end{aligned}$$

$$y = ce^{-\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$

wobei C eine beliebige reelle Konstante ist. Dies ist die allgemeine Lösung der gegebenen exakten Differentialgleichung.