

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 12

Aufgabe 1

Sei J ein Intervall, $A : J \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ stetig und seien Lösungen $z^1, \dots, z^m$ von $y' = A(x)y$ gegeben. Beweisen Sie: Existiert ein $x^* \in J$, so dass die Vektoren $z^1(x^*), \dots, z^m(x^*)$ in $\mathbb{R}^m$ linear unabhängig sind, so gilt dies bereits für alle $x \in J$.

Aufgabe 2

a) Man bestimme die Lösungsmatrix von

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y \quad \text{zum Startpunkt } x_0 = 0.$$

b) Man löse das inhomogene Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x-1 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis:

$$y(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung des inhomogenen Systems.}$$

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Matrix-Reihe

$$\exp((x - x_0)A) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^j A^j}{j!}$$

lokal gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Hinweis: Alle Normen auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^{m \times m}$ sind bekanntermaßen äquivalent. Es bietet sich, eine submultiplikative $\|\cdot\|$ Norm zu betrachten, für die also $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ gilt. Diese ist zum Beispiel durch

$$\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{|Av|}{|v|},$$

gegeben, mit $|\cdot|$ der euklidischen Norm.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und sei Y die Lösungsmatrix zu $y' = Ay$ zum Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

$$Y(x) = \exp((x - x_0)A) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$