

Antwort 1.

Sei J ein Intervall und $A : J \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ stetig. Für die Lösungen $z^1, \dots, z^m$ von $y' = A(x)y$ gilt:

Zu zeigen: Die $z^1, \dots, z^m$ sind linear unabhängig für alle $x \in J$, wenn sie in einem Punkt $x^* \in J$ linear unabhängig sind.

Beweis: Angenommen $\exists x_0 \in J$ mit linear abhängigen $z^1(x_0), \dots, z^m(x_0)$. Dann existiert $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m \setminus (0, \dots, 0)$ mit

$$\sum_{j=1}^m c_j z^j(x_0) = 0.$$

Betrachte $y(x) := \sum_{j=1}^m c_j z^j(x)$. Dies löst:

$$y' = A(x)y, \quad y(x_0) = 0$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz gilt $y(x) \equiv 0$ auf J , also

$$0 = y(x^*) = \sum_{j=1}^m c_j z^j(x^*),$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit bei x^* .

Antwort 2a. Wir bestimmen zunächst die Lösungsmatrix des homogenen Problems zum Startpunkt $x_0 = 0$. Wir lösen hierzu das AWP

$$Y'(x) = AY(x), \quad Y(0) = I, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mittels Picard-Iteration: Sei Z_k die k -te Picard-Iterierte, also $Y(x) = \lim_k Z_k(x)$.

$$1. \text{ Startiteration: } Z_0(x) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Erste Iteration:

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= I + \int_0^x AZ_0(t)dt = I + \int_0^x A dt \\ &= I + xA = \begin{pmatrix} 1+x & 2x \\ 2x & 1+x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Zweite Iteration:

$$\begin{aligned} Z_2(x) &= I + \int_0^x AZ_1(t)dt = I + \int_0^x A(I + tA)dt \\ &= I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \end{aligned}$$

Berechnung von A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} Z_2(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + x + \frac{5x^2}{2} & 2x + 2x^2 \\ 2x + 2x^2 & 1 + x + \frac{5x^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Dritte Iteration:

$$\begin{aligned} Z_3(x) &= I + \int_0^x AZ_2(t)dt = I + \int_0^x A \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \right) dt \\ &= I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{x^3}{6}A^3 \end{aligned}$$

Berechnung von A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} Z_3(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \frac{x^3}{6} \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 14 & 13 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} & 2x + 2x^2 + \frac{14x^3}{6} \\ 2x + 2x^2 + \frac{14x^3}{6} & 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Matrix-Elemente:

$$\begin{aligned} Y_{11}(x) &= Y_{22}(x) = 1 + x + \frac{5x^2}{2} + \frac{13x^3}{6} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-x}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Y_{12}(x) &= Y_{21}(x) = 2x + 2x^2 + \frac{14x^3}{6} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} \right) - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{3x} - e^{-x}). \end{aligned}$$

Und somit die Lösungsmatrix

$$Y(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3x} + e^{-x} & e^{3x} - e^{-x} \\ e^{3x} - e^{-x} & e^{3x} + e^{-x} \end{pmatrix}$$

Antwort 2b.

Gegeben ist das inhomogene AWP:

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x-1 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus Aufgabe 2a ist mit der Lösungsmatrix

$$Y(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3x} + e^{-x} & e^{3x} - e^{-x} \\ e^{3x} - e^{-x} & e^{3x} + e^{-x} \end{pmatrix}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mit Startpunkt x_0 gegeben durch

$$y_h(x) = Y(x)c,$$

mit $c \in \mathbb{R}^m$. Weiterhin ist

$$y_p(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung der inhomogenen DGL. Damit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zum Startpunkt $x_0 = 0$ gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Y(x)c + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir ermitteln nun die Konstante c mittels

$$y(0) = Y(0)c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$y(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3x} + e^{-x} \\ e^{3x} - e^{-x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{3x} + e^{-x}}{2} - x \\ \frac{e^{3x} - e^{-x}}{2} \end{pmatrix}.$$

Antwort 3. Zunächst bemerken wir, dass jede absolut konvergente Reihe $\sum_j v_j$ in einem endlich-dimensionalen normierten reellen Vektorraum konvergiert, da die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist (Beweis wie im $\mathbb{R}^1$).

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Matrixnorm. Es gilt dann $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist $r > 0$, so erhält man für alle $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$,

$$\sum_j \left\| \frac{(x - x_0)^j A^j}{j!} \right\| \leq \sum_j \frac{|x - x_0|^j \|A\|^j}{j!} \leq \sum_j \frac{r^j \|A\|^j}{j!} \leq e^{r\|A\|},$$

also konvergiert die Exponentialreihe lokal gleichmäßig in x_0 .

Antwort 4.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmatrix $Y(x)$ des AWP

$$Y' = AY, \quad Y(x_0) = E$$

ist zu bestimmen. Die Picard-Iteration

$$Y_0(x) = E$$

$$Y_{k+1}(x) = E + \int_{x_0}^x AY_k(t) dt$$

liefert $Y(x) = \lim_k Y_k(x)$.

- **Erste Iteration:**

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= E + \int_{x_0}^x AY_0(t) dt \\ &= E + \int_{x_0}^x AE dt \\ &= E + A \int_{x_0}^x dt \\ &= E + (x - x_0)A \end{aligned}$$

- **Zweite Iteration:**

$$\begin{aligned} Y_2(x) &= E + \int_{x_0}^x AY_1(t) dt \\ &= E + \int_{x_0}^x A(E + (t - x_0)A) dt \\ &= E + A \int_{x_0}^x dt + A^2 \int_{x_0}^x (t - x_0) dt \\ &= E + (x - x_0)A + A^2 \left[\frac{(t - x_0)^2}{2} \right]_{x_0}^x \\ &= E + (x - x_0)A + \frac{(x - x_0)^2}{2} A^2 \end{aligned}$$

- **Dritte Iteration:**

$$\begin{aligned}
 Y_3(x) &= E + \int_{x_0}^x AY_2(t)dt \\
 &= E + \int_{x_0}^x A \left(E + (t - x_0)A + \frac{(t - x_0)^2}{2}A^2 \right) dt \\
 &= E + A \int_{x_0}^x dt + A^2 \int_{x_0}^x (t - x_0)dt + \frac{A^3}{2} \int_{x_0}^x (t - x_0)^2 dt \\
 &= E + (x - x_0)A + \frac{(x - x_0)^2}{2}A^2 + \frac{A^3}{2} \left[\frac{(t - x_0)^3}{3} \right]_{x_0}^x \\
 &= E + (x - x_0)A + \frac{(x - x_0)^2}{2}A^2 + \frac{(x - x_0)^3}{6}A^3
 \end{aligned}$$

- **Allgemeine Form:** Durch Induktion folgt:

$$Y_k(x) = \sum_{j=0}^k \frac{(x - x_0)^j}{j!} A^j.$$

Es folgt

$$Y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^j}{j!} A^j = \exp((x - x_0)A),$$

und diese Konvergenz ist lokal gleichmäßig in x_0 nach Aufgabe 3.