

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 2

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass die Doppelkegeloberfläche

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

keine glatte UMF mit Rand ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass die Zylinderoberfläche

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine glatte 2-dimensionale UMF mit Rand ist.

Aufgabe 3

Seien $M_j \subset \mathbb{R}^{l_j}$ glatte l_j -dimensionale UMF mit Rand. Beweisen Sie: Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ ist genau dann glatt im Sinne von Definition 1.1.26, wenn für jede Karte $\tilde{\phi}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \tilde{V}_j$ von M_j die induzierte Abbildung

$$\tilde{\phi}_2 \circ f \circ \tilde{\phi}_1^{-1} : \tilde{\phi}_1(\tilde{U}_1 \cap f^{-1}(\tilde{U}_2)) \longrightarrow \tilde{V}_2$$

glatt ist.

Aufgabe 4

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand. Für $f \in C^\infty(M)$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sei die Funktion $X[f] : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch $X[f](x) := df(x)X(x)$ definiert¹. Beweisen Sie für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$:

- a) $(X + Y)[f] = X[f] + Y[f]$, $X[f + g] = X[f] + X[g]$
- b) $(f \cdot X)[g] = f \cdot X[g]$
- c) $X[f \cdot g] = X[f] \cdot g + f \cdot X[g]$
- d) Die Funktion $X[f]$ ist glatt.

¹Man beachte, dass $df(x)$ eine Linearform auf $T_x M$ ist.