

Lösung 1: Die Menge $K \setminus \{0\}$ ist offensichtlich nicht wegzusammenhängend. Aber es gilt der folgende Satz (der dann einen Widerspruch zur Annahme, dass K eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, liefert):

Satz: Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte wegzusammenhängende 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Dann ist $M \setminus \{p\}$ wegzusammenhängend.

Beweis. Seien $x, y \in M \setminus \{p\}$ beliebig. Da M wegzusammenhängend ist, existiert ein stetiger Weg

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M$$

so dass $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Falls $\gamma([0, 1]) \subset M \setminus \{p\}$, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Andernfalls nehme man an, dass γ durch den Punkt p verläuft, d. h. es existiert ein $t_0 \in [0, 1]$ mit $\gamma(t_0) = p$. Da M eine glatte Mannigfaltigkeit ist, existiert eine Karte $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ um p mit $\tilde{\varphi}(p) = 0 \in \mathbb{R}^2$ und $\tilde{V}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass die abgeschlossene euklidische Scheibe $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset \tilde{V}$ liegt, und setze

$$W := \tilde{\varphi}^{-1}(B_\varepsilon(0)) \subset \tilde{U}.$$

Dann ist W eine offene Umgebung von p in M , die diffeomorph zu einer offenen Scheibe in $\mathbb{R}^2$ ist, und es gilt

$$W \setminus \{p\} \cong B_\varepsilon(0) \setminus \{0\},$$

welche wegzusammenhängend ist.

Da γ stetig ist und $[0, 1]$ kompakt ist, ist das Urbild $\gamma^{-1}(\{p\})$ abgeschlossen und kann durch endlich viele Intervalle überdeckt werden. Betrachte ein kleines Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [0, 1]$, so dass $\gamma([t_0 - \delta, t_0 + \delta]) \subset W$ liegt. Dann liegen die Randpunkte $\gamma(t_0 - \delta)$ und $\gamma(t_0 + \delta)$ beide in $W \setminus \{p\}$, und da diese Menge wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg in $W \setminus \{p\}$, der sie verbindet.

Man definiert einen neuen Weg $\tilde{\gamma}$, indem man γ nur auf dem Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ modifiziert und den durch p verlaufenden Teil durch den neuen Weg in $W \setminus \{p\}$ ersetzt. Da wir γ nur lokal verändert haben, ist der neue Weg $\tilde{\gamma}$ stetig und verbindet x mit y innerhalb von $M \setminus \{p\}$.

Dieser Prozess kann für jede endliche Anzahl von Schnittpunkten mit p wiederholt werden, wodurch letztlich ein Weg von x nach y in $M \setminus \{p\}$ entsteht. Also ist $M \setminus \{p\}$ wegzusammenhängend. $\square$

Lösung 2:

Lösung 3:

Lösung 4: Es gilt (mit W^* dem Raum der Linearformen auf W)

$$df(x) \in (T_x M)^*, \quad df(x)v = (f \circ \gamma)'(0) = (d/dt)|_{t=0}(f \circ \gamma)(t),$$

wobei $\gamma : I \rightarrow M$ eine beliebige glatte Kurve die in x startet und $v = \gamma'(0) \in T_x M$ erfüllt ist. Die behauptete Linearität von $df(x)$ ist in der Vorlesung mittels Karten bewiesen worden.

a) Fixiert man $x \in M$ und setzt man $v := X(x)$, so folgt die erste Formel folgt aus der Linearität von $df(x)$, und die zweite Formel folgt aus

$$d(f + g) = df + dg$$

welche man wegen der Linearität von d/dt wie folgt sieht:

$$d(f + g)(x) = (d/dt)|_{t=0}((f + g) \circ \gamma)(t) = (d/dt)|_{t=0}(f \circ \gamma + g \circ \gamma)(t) = df(x) + dg(x).$$

b) Dies folgt erneut aus der Linearität von $dg(x)$, denn fixiert man $x \in M$ und setzt man $v := X(x)$, so gilt

$$(fX)[g](x) = dg(x)f(x)v = f(x)dg(x)v = f(x)X[g](x).$$

c) Dies folgt aus der Produktregel

$$d(fg) = gdf + fdg,$$

welche sich wegen

$$d(fg)(x) = (d/dt)|_{t=0}((fg) \circ \gamma)(t) = (d/dt)|_{t=0}\left((f \circ \gamma) \cdot (g \circ \gamma)\right)(t)$$

aus der Produktregel für 1-dimensionale Ableitungen folgern lässt.

d) Mit $\tilde{\phi}$ einer Karte für M wurde in der Vorlesung folgende Formel notiert:

$$df(x) = (f \circ \tilde{\phi}^{-1})'(\tilde{\phi}(x))\tilde{\phi}'(x),$$

welche bedeutet, dass für x aus einer Karte, die lineare Abbildung $v \mapsto df(x)v \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch die Multiplikation mit dem Skalar

$$(f \circ \tilde{\phi}^{-1})'(\tilde{\phi}(x))\tilde{\phi}'(x) \in \mathbb{R}.$$

Dieser Skalar hängt offenbar glatt von x ab. Damit hängt das Produkt

$$df(x)X(x) = (f \circ \tilde{\phi}^{-1})'(\tilde{\phi}(x))\tilde{\phi}'(x)X(x)$$

glatt von x ab.