

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 3

Aufgabe 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand und seien

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}, \quad \tilde{\psi} = (y_1, \dots, y_m) : \tilde{W} \rightarrow \tilde{X}$$

zwei Karten um $a \in M$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a) = \sum_{\alpha=1}^m \partial_i(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1})_{\alpha}(\tilde{\phi}(a)) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}(a),$$

wobei $(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1})_{\alpha}$ die α -te Komponente der Abbildung $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ zwischen Teilmengen des $\mathbb{R}^m$ bezeichnet.

Aufgabe 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand. Beweisen Sie: M ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas $\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{V}_i$, $i \in I$, von M existiert, sodass für alle $i, j \in I$ mit $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$ die Bedingung

$$\det((\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1})'(u)) > 0 \quad \text{für alle } u \in \tilde{\phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3

Für Vektoren $a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}^m$ sei ihr Kreuzprodukt

$$a_1 \times \dots \times a_{m-1} \in \mathbb{R}^m$$

definiert durch

$$\langle v, a_1 \times \dots \times a_{m-1} \rangle := \det(v, a_1, \dots, a_{m-1}).$$

Beweisen Sie:

a) Der Vektor $a_1 \times \dots \times a_{m-1}$ ist orthogonal zu jedem der a_i .

b) Bezeichnet a_{ij} die i -te Komponente des Vektors a_j und $e_j \in \mathbb{R}^m$ den j -ten Einheitsvektor, so gilt

$$a_1 \times \dots \times a_{m-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & a_{11} & \dots & a_{1(m-1)} \\ e_2 & a_{21} & \dots & a_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_m & a_{m1} & \dots & a_{m(m-1)} \end{pmatrix},$$

wobei im rechten Ausdruck formal die Determinante nach der ersten Spalte entwickelt wird.

c) Die Zahl $|a_1 \times \dots \times a_{m-1}|$ ist gleich dem $(m-1)$ -dimensionalen Volumen des von $a_1, \dots, a_{m-1}$ aufgespannten Parallelotops.