

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 4

Aufgabe 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte, orientierbare und zusammenhängende UMF mit Rand der Dimension m . Beweisen Sie, dass es genau zwei voneinander verschiedene Orientierungen von M gibt.

Aufgabe 2

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist eine zweidimensionale glatte UMF, welche als Bild der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ \Phi(\theta, t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + t \cos(\theta/2) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + t \sin(\theta/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$M = \Phi(\mathbb{R} \times [-1/2, 1/2]).$$

Für $p = \Phi(\theta, t) \in M$ ist eine Basis von $T_p M$ gegeben durch¹

$$\partial_\theta \Phi(\theta, t) \in \mathbb{R}^3, \quad \partial_t \Phi(\theta, t) \in \mathbb{R}^3.$$

Beweisen Sie, dass auf M kein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld existieren kann (und somit, dass M nicht orientierbar ist).

Aufgabe 3

Sei V ein m -dimensionaler reeller Vektorraum und seien $r, s \in \mathbb{N}$.

a) Für $\omega \in \wedge^r V^*$, $\eta \in \wedge^s V^*$ sei eine Multilinearform $\omega \wedge \eta$ auf V definiert durch

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{r+s}) := \frac{1}{r!} \frac{1}{s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) \cdot \eta(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+s)})$$

Beweisen Sie, dass $\omega \wedge \eta$ alternierend ist.

b) Beweisen Sie, dass das Dachprodukt

$$\wedge^r V^* \times \wedge^s V^* \longrightarrow \wedge^{r+s} V^*, \\ (\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta := \frac{1}{r!} \frac{1}{s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}) \cdot \eta(v_{\tau(r+1)}, \dots, v_{\tau(r+s)})$$

assoziativ ist.

c) Beweisen Sie:

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{rs} \omega \wedge \eta \quad \text{für alle } \omega \in \wedge^r V^*, \eta \in \wedge^s V^*.$$

¹Dies muss in dieser Aufgabe genau wie die UMF-Eigenschaft von M nicht bewiesen werden.