

Antwort 1. Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte, orientierbare und zusammenhängende Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m . Angenommen, M sei mit zwei Orientierungen O_1 und O_2 , versehen. Sei

$$A := \{p \in M \mid \text{die beiden Orientierungen stimmen auf } T_p M \text{ überein}\}.$$

Da M orientierbar ist, existiert für jeden Punkt $p \in M$ eine Karte

$$\tilde{\phi}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \tilde{V}_j \quad \text{mit } p \in \tilde{U}_j, \text{ sodass } \tilde{\phi}_j = (x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)}) \text{ bezüglich } O_j \text{ positiv orientiert ist.}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}_2$ und $\tilde{U}_1$ zusammenhängend. Wegen $O_{1,p} = O_{2,p}$ hat die Determinante der Basiswechselmatrix $T(p)$ von $\partial_{x_i^{(1)}}(p)$ zu $\partial_{x_j^{(2)}}(p)$ eine positive Determinante.

Da $q \mapsto \det(T(q))$ stetig auf der zusammenhängenden Menge $\tilde{U}_1$ ist, ist diese Funktion überall auf $\tilde{U}_1$ positiv. Dies beweist $\tilde{U}_1 \subset A$ und A ist offen.

Analog zeigt man, dass $M \setminus A$ offen ist. Da M zusammenhängend ist und sowohl A als auch $M \setminus A$ offen sind, folgt, dass entweder $A = M$ oder $A = \emptyset$ gilt. Das bedeutet, dass zwei Orientierungen entweder auf jedem Tangentialraum übereinstimmen oder sich auf jedem Tangentialraum unterscheiden. Da jeder Tangentialraum $T_p M$ genau zwei mögliche Orientierungen zulässt, folgt daraus, dass M genau zwei verschiedene Orientierungsklassen besitzt.

Antwort 2. Betrachten wir das Möbiusband $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, eine 2-dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit, welche das Bild der Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(\theta, t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + t \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + t \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist, also gilt

$$\mathcal{M} = \Phi\left(\mathbb{R} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Zunächst bestimmen wir die Tangentialvektoren, um den Normalenvektor zu berechnen:

$$\partial_\theta \Phi(\theta, t) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) + t \left(-\frac{\cos(\theta) \sin(\theta/2)}{2} - \frac{\sin(\theta) \cos(\theta)}{2} \right) \\ \cos(\theta) + t \left(-\frac{\sin(\theta/2) \sin(\theta)}{2} + \cos(\theta) \cos(\theta/2) \right) \\ \frac{t}{2} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

und

$$\partial_t \Phi(\theta, t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \cos(\theta) \\ \cos(\theta/2) \sin(\theta) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Nun setzen wir $t = 0 \in [-1/2, 1/2]$. Dann ergeben sich die folgenden Tangentialvektoren an der Stelle $t = 0$:

$$\partial_\theta \Phi(\theta, 0) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_t \Phi(\theta, 0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \cos(\theta) \\ \cos(\theta/2) \sin(\theta) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Man erkennt leicht, dass diese Vektoren orthogonal zueinander sind, d. h.

$$\langle \partial_\theta \Phi(\theta, 0), \partial_t \Phi(\theta, 0) \rangle = 0.$$

Nun berechnen wir das Kreuzprodukt dieser Vektoren, um den Normalenvektor zu erhalten:

$$\mathbf{n}(\theta, 0) = \partial_\theta \Phi(\theta, 0) \times \partial_t \Phi(\theta, 0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta) \sin(\theta/2) \\ -(\sin^2(\theta) \cos(\theta/2) + \cos^2(\theta) \cos(\theta/2)) \end{pmatrix}.$$

Es ist einfach zu sehen, dass dieser Vektor Norm 1 hat, also ist er ein Einheitsnormalenvektor.

Um zu zeigen, dass das Möbiusband nicht orientierbar ist, genügt es zu zeigen, dass der Einheitsnormalenvektor beim einmaligen Umlaufen des Bandes (also bei der Variation von θ von 0 bis 2π) sein Vorzeichen wechselt, da dann kein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld existieren kann. Es gilt:

$$\mathbf{n}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}(2\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{n}(0, 0) = -\mathbf{n}(2\pi, 0).$$

Antwort 3.a Es bezeichne $\text{Mult}^r(V^*)$ den linearen Raum aller multilinearen Abbildungen $V^r \rightarrow \mathbb{R}$ und sei

$$\mathcal{F} : \text{Mult}^r(V^*) \rightarrow \text{Mult}^r(V^*)$$

gegeben durch

$$\mathcal{F}(\omega) := \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \text{sign}(\tau) \omega_\tau,$$

wobei

$$\omega_\tau(v_1, \dots, v_r) := \omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}).$$

Diesen Projektor nennt man *Alternator*. Wir zeigen zunächst $\mathcal{F}(\omega)$ alternierend ist, also

$$\mathcal{F} : \text{Mult}^r(V^*) \rightarrow \Lambda^r(V^*).$$

Seien also $v_1, \dots, v_r \in V$ beliebig gewählt und $1 \leq i < j \leq r$. Sei $\sigma \in S_r$ die Transposition, die i und j vertauscht. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\omega)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) &= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \text{sign}(\tau) \omega_\tau(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \text{sign}(\tau) \omega_\tau(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \text{sign}(\tau) \omega_{\tau \circ \sigma}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r) \\
&= \frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} (-1) \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) \omega_{\tau \circ \sigma}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r) \\
&= -\frac{1}{r!} \sum_{\tau \in S_r} \text{sign}(\tau \circ \sigma) \omega_{\tau \circ \sigma}(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r).
\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt $\pi := \tau \circ \sigma$, so können wir auch schreiben, da S_r eine Gruppe ist:

$$-\frac{1}{r!} \sum_{\pi \in S_r} \text{sign}(\pi) \omega_\pi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r) = -\mathcal{F}(\omega)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r).$$

Somit ist $\mathcal{F}(\omega)$ alternierend. Definiert man nun für $f \in \text{Mult}^r(V^*)$, $g \in \text{Mult}^s(V^*)$ die Multilinearform $f \otimes g \in \text{Mult}^{r+s}(V^*)$ durch

$$f \otimes g(v_1, \dots, v_{r+s}) := f(v_1, \dots, v_r) \cdot g(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}),$$

so gilt für $\omega \in \Lambda^r(V^*)$, $\eta \in \Lambda^s(V^*)$,

$$\omega \wedge \eta = C(r, s) F(\omega \otimes \eta),$$

für eine Konstante $C(r, s) \in \mathbb{N}$, also ist $\omega \wedge \eta$ alternierend.

Antwort 3.b

Sei ω, η wie oben und sei $\mu \in \Lambda^t(V^*)$. Wir wollen zeigen, dass

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \mu = \omega \wedge (\eta \wedge \mu).$$

Wir konstruieren zunächst eine kanonische Injektion

$$\tilde{\cdot}: S_{r+s} \hookrightarrow S_{r+s+t}, \quad \sigma \mapsto \tilde{\sigma},$$

wobei

$$\tilde{\sigma}(x) := \begin{cases} \sigma(x) & \text{falls } 1 \leq x \leq r+s, \\ x & \text{falls } r+s < x \leq r+s+t. \end{cases}$$

Dann gilt: $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\tilde{\sigma})$.

Es sei daran erinnert, dass

$$\omega_\tau(v_1, \dots, v_n) := \omega(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}).$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta) \wedge \mu &= \frac{1}{(r+s)! \cdot t!} \sum_{\tau \in S_{r+s+t}} \text{sign}(\tau) (\omega \wedge \eta)_\tau(v_1, \dots, v_{r+s}) \cdot \mu_\tau(v_{r+s+1}, \dots, v_{r+s+t}) \\
&= \frac{1}{(r+s)! \cdot t!} \sum_{\tau \in S_{r+s+t}} \text{sign}(\tau) \cdot \left[\frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \text{sign}(\sigma) \omega_{\tau \circ \sigma}(v_1, \dots, v_r) \cdot \eta_{\tau \circ \sigma}(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \right] \\
&\quad \cdot \mu_\tau(v_{r+s+1}, \dots, v_{r+s+t}).
\end{aligned}$$

σ kann jetzt durch $\tilde{\sigma}$ ersetzt werden; in μ ist es die Identität, schadet also nichts.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(r+s)! \cdot r! \cdot s! \cdot t!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \sum_{\tau \in S_{r+s+t}} \text{sign}(\tau \circ \tilde{\sigma}) \cdot \omega_{\tau \circ \tilde{\sigma}}(v_1, \dots, v_r) \cdot \eta_{\tau \circ \tilde{\sigma}}(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \\
&\quad \cdot \mu_{\tau \circ \tilde{\sigma}}(v_{r+s+1}, \dots, v_{r+s+t}).
\end{aligned}$$

Setze nun $\pi := \tau \circ \tilde{\sigma}$. Dies ändert nichts an der Summe wegen der Gruppeneigenschaft von S_{r+s+t} :

$$\frac{1}{(r+s)! \cdot r! \cdot s! \cdot t!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \sum_{\pi \in S_{r+s+t}} \text{sign}(\pi) \cdot \omega_\pi(v_1, \dots, v_r) \cdot \eta_\pi(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \mu_\pi(v_{r+s+1}, \dots, v_{r+s+t}).$$

Im hinteren Term kommt kein σ mehr vor. Also können wir mit der Kardinalität von S_{r+s} multiplizieren:

$$\begin{aligned}
&\frac{(r+s)!}{(r+s)! \cdot r! \cdot s! \cdot t!} \sum_{\pi \in S_{r+s+t}} \text{sign}(\pi) \cdot \omega_\pi(v_1, \dots, v_r) \cdot \eta_\pi(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \mu_\pi(v_{r+s+1}, \dots, v_{r+s+t}) \\
&= \frac{1}{r! \cdot s! \cdot t!} \sum_{\pi \in S_{r+s+t}} \text{sign}(\pi) \cdot \omega_\pi(v_1, \dots, v_r) \cdot \eta_\pi(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \mu_\pi(v_{r+s+1}, \dots, v_{r+s+t}). \\
&\frac{1}{r! \cdot s! \cdot t!} \sum_{\pi \in S_{r+s+t}} \text{sign}(\pi) \cdot \omega_\pi(v_1, \dots, v_r) \cdot \eta_\pi(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \mu_\pi(v_{r+s+1}, \dots, v_{r+s+t}) \\
&= \frac{(r+s+t)!}{r! \cdot s! \cdot t!} \cdot \mathcal{F}(\omega \otimes \eta \otimes \mu)(v_1, \dots, v_{r+s+t}).
\end{aligned}$$

Antwort 3.c

Zu diesem Zweck definieren wir zunächst eine Permutation $\sigma \in S_{r+s}$, die die ersten s Elemente als Gesamtheit nach hinten schiebt, sodass die letzten r Elemente dann vorne liegen. Die innere Ordnung der r Elemente soll dabei erhalten bleiben, ebenso die der s Elemente.

Sei also

$$\sigma(x) = \begin{cases} x - s & \text{falls } x > s, \\ x + r & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{rs}$.

$$\begin{aligned}
(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{r+s}) &= \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \omega_\tau(v_1, \dots, v_r) \cdot \eta_\tau(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \\
&= \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \eta_\tau(v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) \cdot \omega_\tau(v_1, \dots, v_r) \\
&= \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \eta_{\tau \circ \sigma}(v_1, \dots, v_s) \cdot \omega_{\tau \circ \sigma}(v_{s+1}, \dots, v_{s+r}) \\
&= \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau) \cdot \text{sign}(\sigma) \cdot (-1)^{rs} \cdot \eta_{\tau \circ \sigma}(v_1, \dots, v_s) \cdot \omega_{\tau \circ \sigma}(v_{s+1}, \dots, v_{s+r}) \\
&= (-1)^{rs} \cdot \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\tau \in S_{r+s}} \text{sign}(\tau \circ \sigma) \cdot \eta_{\tau \circ \sigma}(v_1, \dots, v_s) \cdot \omega_{\tau \circ \sigma}(v_{s+1}, \dots, v_{s+r}).
\end{aligned}$$

Wir definieren wieder $\pi := \tau \circ \sigma$ und nutzen die Gruppeneigenschaft aus:

$$= (-1)^{rs} \cdot \frac{1}{r! \cdot s!} \sum_{\pi \in S_{r+s}} \text{sign}(\pi) \cdot \eta_\pi(v_1, \dots, v_s) \cdot \omega_\pi(v_{s+1}, \dots, v_{s+r}) = (-1)^{rs} (\eta \wedge \omega).$$