

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 5

Aufgabe 1

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand. Beweisen Sie:

a) Es gilt

$$\iota_{fX}\omega = f\iota_X\omega \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^k(M), X \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M).$$

b) Es gilt

$$\iota_X(\omega \wedge \sigma) = (\iota_X\omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge (\iota_X\sigma) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^r(M), X \in \mathfrak{X}(M), \sigma \in \Omega^s(M).$$

c) Sei $M' \subset \mathbb{R}^{l'}$ eine glatte m' -dimensionale UMF mit Rand. Sei $f \in C^\infty(M, M')$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M')$ mit $Y[f] = df \circ X$. Dann gilt

$$f^*(\iota_Y\omega) = \iota_X(f^*\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^k(M').$$

Aufgabe 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit Rand und seien $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$. Beweisen Sie:

a) Die Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

ist $\mathbb{R}$ -bilinear und schiefsymmetrisch.

b) Es gilt die Jacobi-Identität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

c) Es gilt:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX[g]Y - gY[f]X.$$

d) Es gilt:

$$[X, Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]].$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie die folgenden drei glatten Vektorfelder auf $\mathbb{S}^2$:

$$X(x, y, z) := (-y, x, 0)^T, \quad Y(x, y, z) := (-z, 0, x)^T, \quad Z(x, y, z) := (0, z, -y)^T.$$

Berechnen Sie die glatten Vektorfelder $[X, Y]$, $[Y, Z]$ und $[Z, X]$ auf $\mathbb{S}^2$.