

Antwort 1a) Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$. Für beliebige Vektorfelder $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}\iota_{fX}\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) &= \omega(fX, X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &= f \cdot \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}) \\ &= f \cdot (\iota_X \omega)(X_1, \dots, X_{k-1})\end{aligned}$$

$$\boxed{\iota_{fX}\omega = f \cdot \iota_X \omega}$$

Antwort 1b)

Zu zeigen: Für $\omega \in \Omega^r(M)$, $\sigma \in \Omega^s(M)$, und $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\iota_X(\omega \wedge \sigma) = (\iota_X \omega) \wedge \sigma + (-1)^r \omega \wedge (\iota_X \sigma).$$

Aufgrund der Linearität (man rechne in Karten) reicht es aus, den Beweis für Produkte von 1-Formen zu geben, sei also

$$\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r, \quad \sigma = \omega_{r+1} \wedge \dots \wedge \omega_{r+s}, \quad \text{wobei } \omega_i \in \Omega^1(M).$$

Wir zeigen zunächst:

Behauptung:

$$\iota_X(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \omega_i(X) \omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_r,$$

wobei das Symbol $\widehat{\omega}_i$ bedeutet, dass ω_i ausgelassen wird.

Beweis der Behauptung: Wir setzen $X_1 = X$ und wenden beide Seiten auf ein beliebiges $(r-1)$ -Tupel von Vektoren $(X_2, \dots, X_r)$ an. Dann ist zu zeigen:

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r)(X_1, \dots, X_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \omega_i(X_1) (\omega_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\omega}_i \wedge \dots \wedge \omega_r)(X_2, \dots, X_r).$$

Die linke Seite der obigen Gleichung ist die Determinante der Matrix A , deren Eintrag in Zeile i , Spalte j durch $\omega_i(X_j)$ gegeben ist.

Zur Vereinfachung der rechten Seite bezeichnen wir mit A_j^i die $(r-1) \times (r-1)$ -Untermatrix von A , die durch das Entfernen der i -ten Zeile und der ersten Spalte entsteht. Dann ergibt sich die rechte Seite zu:

$$\sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \omega_i(X_1) \det A_1^i.$$

Dies ist genau die Entwicklung von $\det A$ nach der ersten Spalte mittels der Minoren, also ist sie gleich $\det A$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir rechnen nun, wegen der Behauptung,

$$\iota_X(\omega \wedge \sigma) = \iota_X(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r \wedge \omega_{r+1} \wedge \dots \wedge \omega_{r+s})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \omega_i(X) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_r \wedge \omega_{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{r+s} \\
&+ \sum_{j=r+1}^{r+s} (-1)^{j-1} \omega_j(X) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r \wedge \omega_{r+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_j} \wedge \cdots \wedge \omega_{r+s} \\
&= \left(\sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \omega_i(X) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_r \right) \wedge \omega_{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{r+s} \\
&+ (-1)^r \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r \wedge \left(\sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \omega_{r+j}(X) \omega_{r+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_{r+j}} \wedge \cdots \wedge \omega_{r+s} \right). \\
&(\iota_X \omega) \wedge \sigma = \left(\sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \omega_i(X) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_r \right) \wedge \omega_{r+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{r+s}, \\
&(-1)^r \omega \wedge (\iota_X \sigma) = (-1)^r \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_r \wedge \left(\sum_{j=1}^s (-1)^{j-1} \omega_{r+j}(X) \omega_{r+1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\omega_{r+j}} \wedge \cdots \wedge \omega_{r+s} \right).
\end{aligned}$$

Antwort 1c Für beliebige Vektorfelder $X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}
(f^*(\iota_Y \omega))(X_1, \dots, X_{k-1}) &= \omega(Y, df(X_1), \dots, df(X_{k-1})) \\
&= \omega(df(X), df(X_1), \dots, df(X_{k-1})) \quad (\text{wegen } Y[f] = df \circ X) \\
&= (f^* \omega)(X, X_1, \dots, X_{k-1}) \\
&= (\iota_X(f^* \omega))(X_1, \dots, X_{k-1}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{f^*(\iota_Y \omega) = \iota_X(f^* \omega)}$$

Antwort 2a)

$$\begin{aligned}
[aX_1 + bX_2, Y] &= (aX_1 + bX_2)[Y] - Y[aX_1 + bX_2] \\
&= (aX_1[Y] - aY[X_1]) + (bX_2[Y] - bY[X_2]) \\
&= a[X_1, Y] + b[X_2, Y]
\end{aligned}$$

Um die $\mathbb{R}$ -Bilinearität zu zeigen, kann man in ähnlicher Weise zeigen, dass

$$[X, aY_1 + bY_2] = a[X, Y_1] + b[X, Y_2]$$

gilt.

Zum Nachweis der Schiefsymmetrie:

$$[X, Y] = X[Y] - Y[X] = -(Y[X] - X[Y]) = -[Y, X]$$

Antwort 2b)

$$\begin{aligned} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ &= [X, Y[Z]] - [X, Z[Y]] + [Y, Z[X]] - [Y, X[Z]] + [Z, X[Y]] - [Z, Y[X]] \\ &= X[Y[Z]] - Y[Z[X]] - X[Z[Y]] + Z[Y[X]] \\ &\quad + Y[Z[X]] - Z[X[Y]] - Y[X[Z]] + X[Z[Y]] \\ &\quad + Z[X[Y]] - X[Y[Z]] - Z[Y[X]] + Y[X[Z]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Antwort 2c) Für $f, g \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX[gY] - gY[fX] \\ &= gfX[Y] + fX[g]Y - fgY[X] - gY[f]X \\ &= gfX[Y] - fgY[X] + fX[g]Y - gY[f]X \\ &= fg[X, Y] + fX[g]Y - gY[f]X \end{aligned}$$

Antwort 2d) Für $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned} [X, Y][f] &= (X[Y] - Y[X])[f] \\ &= X[Y][f] - Y[X][f] \\ &= X[Y[f]] - Y[X[f]] \end{aligned}$$

Antwort 3

$$\begin{aligned} X(x, y, z) &:= (-y, x, 0) \\ Y(x, y, z) &:= (-z, 0, x) \\ Z(x, y, z) &:= (0, z, -y) \end{aligned}$$

für $[X, Y]$:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= X[Y] - Y[X] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} = Z \end{aligned}$$