

Lösungen Blatt 6

Antwort 1. Sei

$$\mathbb{B} := \{B_r(x) : r \in \mathbb{Q}_+, x \in \mathbb{Q}^l\}$$

und

$$\mathcal{K} := \{K_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$$

eine kompakte Ausschöpfung von $\mathbb{R}^l$, wobei jedes K_i kompakt ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$K_i \subseteq K_{i+1}^\circ \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i = \mathbb{R}^l.$$

Sei nun $\mathbb{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^l$. Dann ist

$$V_i := K_i \setminus K_{i-1}^\circ \quad \text{kompakt und} \quad W_i := K_{i+1}^\circ \setminus K_{i-2} \quad \text{offen.}$$

Fixieren wir nun ein $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $x \in V_i$, dass es eine Kugel $B_{i,x} \in \mathbb{B}$ gibt mit

$$x \in B_{i,x}, \quad B_{i,x} \subseteq U_\alpha \quad \text{für ein gewisses } \alpha.$$

Dann existiert eine endliche Überdeckung

$$\{B_{i,x_1} \cap W_i, \dots, B_{i,x_{i_n}} \cap W_i\} \quad \text{von } V_i.$$

Daraus ergibt sich die folgende offene Überdeckung:

$$\mathbb{V} := \{B_{i,x_l} : i \in \mathbb{N}_0, 1 \leq l \leq i_n\},$$

welche sowohl abzählbar als auch lokal endlich ist und eine Verfeinerung von $\mathbb{U}$ darstellt.

Antwort 2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^l$ und $\mathbb{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von M . Dann existiert für jedes $\alpha \in \Lambda$ eine offene Menge $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^l$, sodass

$$U_\alpha = V_\alpha \cap M.$$

Daraus folgt:

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha.$$

Dann ist

$$\{V_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \cup \{\mathbb{R}^l\}$$

eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^l$. Nach Antwort 1 existiert daraus eine abzählbare und lokal endliche Verfeinerung $\mathbb{W}$. Dann ist

$$\mathbb{W} := \{W \cap U_\alpha : W \in \mathbb{W}, \alpha \in \Lambda\}$$

eine abzählbare und lokal endliche Verfeinerung von $\mathbb{U}$.

Antwort 3. Sei $U \subset \mathbb{R}^l$ eine offene Menge, die den Nullvektor 0 enthält und sternförmig bezüglich 0 ist. Um die Aussage im Satz von Poincaré zu zeigen, definieren wir für jedes $k \geq 1$ einen linearen Operator

$$S_k : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

und zeigen, dass für jede k -Form ω die Gleichung

$$\omega = S_{k+1}(d\omega) + dS_k(\omega)$$

gilt.

Falls ω abgeschlossen ist, das heißt $d\omega = 0$, so folgt für die $(k-1)$ -Form $\eta := S_k(\omega)$, dass

$$d\eta = \omega$$

gilt, und damit ist der Satz von Poincaré bewiesen.

Sei ω eine k -Form auf U . Wir stellen ω in den Euklidischen Koordinaten $(x_1, \dots, x_l)$ dar

$$\omega = \sum_{I:=(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq l)} \omega_I dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei

$$\omega_I = \omega|_U \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) \in C^\infty(U).$$

Wir definieren die $(k-1)$ -Form $S_k(\omega) \in \Omega^{k-1}(U)$ mittels der Koeffizienten ω_I von ω durch

$$(S_k(\omega))_x := \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\underbrace{\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt}_{=: \theta(x) \in C^\infty} \right) x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Da U sternförmig bezüglich 0 ist, ist $\omega_I(tx)$ für alle $t \in [0, 1]$ definiert und damit auch die Form $S_k(\omega)$ korrekt gegeben. Offensichtlich ist die Zuordnung $\omega \mapsto S_k(\omega)$ linear.

Für das Differential von $S_k(\omega)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} dS_k(\omega)_x &:= \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\sum_{j=1}^l \frac{\partial \theta}{\partial x_j}(x) dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\stackrel{\text{PR}}{=} \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^l \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{\beta=1}^k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_\beta} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& = \sum_I \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \cdot \sum_{j=1}^l \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) \cdot x_{i_\alpha} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& \quad + \sum_I \left(\int_0^1 k \cdot t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

Für das Differential von ω gilt

$$\begin{aligned}
d\omega & = \sum_I d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& = \sum_I \sum_{j=1}^l \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j} \cdot dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

Wir ordnen nun der $(k+1)$ -Form $d\omega$ durch die gleiche Prozedur wie oben die k -Form $S_{k+1}(d\omega)$ auf U zu und erhalten:

$$\begin{aligned}
S_{k+1}(d\omega)_x & = \sum_I \sum_{j=1}^l \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& \quad - \sum_I \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^l (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_{i_\alpha} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

Durch Addition der Formeln für $dS_k(\omega)$ und $S_{k+1}(d\omega)$ folgt bei Benutzung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
dS_k(\omega) + S_{k+1}(d\omega) & = \sum_I \left(\int_0^1 k \cdot t^{k-1} \omega_I(tx) dt \right) \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& \quad + \sum_I \sum_{j=1}^l \left(\int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_I}{\partial x_j}(tx) dt \right) x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& = \sum_I \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k \omega_I(tx)) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& = \sum_I \omega_I(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\
& = \omega.
\end{aligned}$$