

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Blatt 7

Aufgabe 1

a) Beweisen Sie: Mit

$$\phi^j = (\phi_1^j, \phi_2^j) : \mathbb{S}^2 \setminus \{j\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

der Karte die von der stereographischen Projektion vom j -Pol stammt, $j = N, S$, ist ϕ^S zusammen mit

$$\varphi^N := (\phi_1^N, -\phi_2^N)$$

ein orientierter Atlas von $\mathbb{S}^2$ (der Kartenwechsel hat also eine positive Jacobi-Determinante). Dies ist die sogenannte *Standardorientierung* von $\mathbb{S}^2$.

b) Sei $\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ gegeben durch

$$\omega := \hat{x}d\hat{y} \wedge d\hat{z} + \hat{y}d\hat{z} \wedge d\hat{x} + \hat{z}d\hat{x} \wedge d\hat{y},$$

wobei $\hat{x} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ für die Projektion $(x, y, z) \mapsto x$ steht, und analog $\hat{y}, \hat{z}$. Berechnen Sie $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$. Hinweis: es reicht, das Integral über das Kartengebiet von φ_N zu berechnen (Warum?).

Aufgabe 2

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine orientierte, glatte m -dimensionale UMF mit Rand und sei $F : M \rightarrow M'$ ein orientierungserhaltender glatter Diffeo, mit $M' \subset \mathbb{R}^{l'}$ einer weiteren orientierten, glatten m -dimensionalen UMF mit Rand. Beweisen Sie: Ist $A \subset M$ eine Borelmenge und $\omega \in \Omega_c^m(M')$, so gilt

$$\int_A F^* \omega = \int_{F(A)} \omega.$$

Aufgabe 3

Sei $M \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte m -dimensionale UMF mit $\partial M \neq \emptyset$ und sei

$$\partial M \ni x \mapsto \nu(x) \in T_x M \subset \mathbb{R}^l$$

das zugehörige Vektorfeld der äußeren Normalen. Beweisen Sie, dass ν glatt ist.