

Antwort 1.a. Die stereographischen Projektionen vom Nordpol $N = (0, 0, 1)$ und Südpol $S = (0, 0, -1)$ der Einheitssphäre

$$\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

definieren die Karten $(\phi^N)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ und $(\phi^S)^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ mit:

$$\phi^N(u, v) := \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right),$$

$$\phi^S(u, v) := \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Dann ist

$$\varphi^N(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, -\frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

und

$$(\phi^S)^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

und somit ist der Koordinatenwechsel $((\phi^S)^{-1} \circ \varphi^N) : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$((\phi^S)^{-1} \circ \varphi^N)(u, v) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{-v}{u^2 + v^2} \right)$$

Seine Jacobi-Matrix berechnet sich durch:

$$((\phi^S)^{-1} \circ \varphi^N)'(u, v) = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} v^2 - u^2 & -2uv \\ 2uv & v^2 - u^2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det((\phi^S)^{-1} \circ \varphi^N)'(u, v) = \frac{u^4 + v^4}{(u^2 + v^2)^2} > 0$$

Antwort 1.b. Es ist $\omega = x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$. Da die einpunktige Menge $\{S\}$ eine Nullmenge ist, gilt

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_{\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}} \omega,$$

und wir berechnen die rechte Seite mittels der obigen Karte

$$\psi(x, y, z) := (\phi^S)^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) =: (u(x, y, z), v(x, y, z)),$$

also

$$\psi^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right) =: (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

und

$$\partial_u(u, v) = \partial_u \psi^{-1}(u, v)$$

$$\partial_v(u, v) = \partial_v \psi^{-1}(u, v)$$

Wir müssen die Funktion $\omega(\partial_u, \partial_v)$ ausrechnen, denn

$$\int_{\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}} \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\partial_u, \partial_v) du dv.$$

ausrechnen. Hierzu gilt

$$(x \, dy \wedge dz)(\partial_u, \partial_v) = x \cdot \det \begin{pmatrix} dy(\partial_u) & dy(\partial_v) \\ dz(\partial_u) & dz(\partial_v) \end{pmatrix}$$

Wir haben

$$dy(\partial_u) = \partial_u y du(\partial_u) + \partial_v y dv(\partial_u) = \partial_u y$$

Analog findet man

$$dy(\partial_v) = \partial_v y, \quad dz(\partial_u) = \partial_u z, \quad dz(\partial_v) = \partial_v z,$$

so

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} dy(\partial_u) & dy(\partial_v) \\ dz(\partial_u) & dz(\partial_v) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{-4uv}{(u^2+v^2+1)^2} & \frac{2(u^2-v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^2} \\ \frac{-4u}{(u^2+v^2+1)^2} & \frac{-4v}{(u^2+v^2+1)^2} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-4uv}{(u^2+v^2+1)^2} \right) \left(\frac{-4v}{(u^2+v^2+1)^2} \right) \\ & \quad - \left(\frac{2(u^2-v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^2} \right) \left(\frac{-4u}{(u^2+v^2+1)^2} \right) \\ &= \frac{16uv^2}{(u^2+v^2+1)^4} + \frac{8u(u^2-v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^4} \\ &= \frac{8u(u^2+v^2+1)}{(u^2+v^2+1)^4} \\ &= \frac{8u}{(u^2+v^2+1)^3} \end{aligned}$$

also

$$(x \, dy \wedge dz)(\partial_u, \partial_v) = x \det \begin{pmatrix} dy(\partial_u) & dy(\partial_v) \\ dz(\partial_u) & dz(\partial_v) \end{pmatrix} = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \cdot \frac{8u}{(u^2+v^2+1)^3} = \frac{16u^2}{(u^2+v^2+1)^4}.$$

Analoge Rechnungen zeigen

$$(y \, dz \wedge dx)(\partial_u, \partial_v) = \frac{16v^2}{(u^2+v^2+1)^4}$$

und

$$(z \, dx \wedge dy)(\partial_u, \partial_v) = \frac{4(u^2 + v^2 - 1)^2}{(u^2 + v^2 + 1)^4},$$

also

$$\omega(\partial_u, \partial_v) = \frac{16u^2 + 16v^2 + 4(u^2 + v^2 - 1)^2}{(u^2 + v^2 + 1)^4} = \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$$

und schließlich

$$\int_{\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}} \omega = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{4r}{(r^2 + 1)^2} \, dr \, d\theta = 4\pi.$$

Antwort 2. Dies ist die koordinatenunabhängige Variante der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral. Es genügt die Behauptung für Borelmengen $A \subset M$ mit $A \subset \tilde{U}$ und $F(A) \subset \tilde{X}$ zu zeigen, wobei $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ und $(\tilde{X}, \tilde{\psi})$ positiv orientierte Karten auf M bzw. M' sind. Es gilt

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{\tilde{\psi}(F(A))} \omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} \, d\lambda_m.$$

Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$T := \tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\phi}^{-1} : \tilde{\phi}(\tilde{U} \cap F^{-1}(\tilde{X})) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \tilde{\psi}(\tilde{X}) \subset \mathbb{R}^m.$$

Dann folgt aus der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{T(\tilde{\phi}(A))} \omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} \, d\lambda_m = \int_{\tilde{\phi}(A)} (\omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ T) \cdot |\det T'| \, d\lambda_m.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (F^*\omega)_{\tilde{\phi}}(x) &= (F^*\omega)_x \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(x) \right) = \omega_{F(x)} \left(dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \right), \dots, dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_m}(x) \right) \right) \\ &= \underbrace{\det((\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\phi}^{-1})'(x))}_{-\det T'_x} \cdot \underbrace{\omega_{F(x)} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}(F(x)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_m}(F(x)) \right)}_{\omega_{\tilde{\psi}}(F(x))} \\ &= \det T'_x \cdot \omega_{\tilde{\psi}}(F(x)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Definition der kanonischen Basis und das Transformationsverhalten von Formen unter Koordinatenwechsel benutzt haben. Daraus folgt

$$(F^*\omega)_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} = (\det T') \cdot (\omega_{\tilde{\psi}} \circ F \circ \tilde{\phi}^{-1}) = (\det T') \cdot (\omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ T).$$

Wir bemerken, dass $\det((\tilde{\psi} \circ F \circ \tilde{\phi}^{-1})') > 0$, denn F ist orientierungserhaltend. Somit erhalten wir

$$(F^*\omega)_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} = |\det T'| \cdot (\omega_{\tilde{\psi}} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ T)$$

und deshalb ist

$$\int_{F(A)} \omega = \int_{\tilde{\phi}(A)} (F^*\omega)_{\tilde{\phi}} \circ \tilde{\phi}^{-1} d\lambda_m = \int_A F^*\omega.$$

Antwort 3. Sei $x_0 \in \partial M$ beliebig und wähle (induziert durch "extrinsische Karten vom Typ ii") eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset M$ von x_0 und einen glatten Diffeo

$$\tilde{\phi} = (x_1, \dots, x_m) : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subset \mathbb{R}_+^m$$

mit $\tilde{\phi}(x_0) = 0$ und

$$\tilde{\phi}(\tilde{U} \cap \partial M) = \{r = (r_1, \dots, r_m) \in \tilde{V} : r_m = 0\}.$$

Sei $e_1, \dots, e_m$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$. Für alle $x \in \tilde{U}$ ist dann $v_j(x) := (d\tilde{\phi}(x))^{-1}(e_j)$, $j = 1, \dots, m$, eine Basis von $T_x M$ und $v_j(x)$, $j = 1, \dots, m-1$, eine Basis des $(m-1)$ -dimensionalen Teilraums $T_x \partial M \subset T_x M$. Somit liegt $v_m(x)$ nicht in $T_x \partial M$, und dieser Vektor hängt glatt von x ab. Wenden wir das aus glatten Operationen bestehende Gram-Schmidt Verfahren auf $v_j(x)$, $j = 1, \dots, m$ an, so erhalten wir dadurch glatt von x abhängende normierte Vektoren $w_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, sodass $w_m(x)$ senkrecht auf dem von $w_j(x)$, $j = 1, \dots, m-1$ erzeugten Teilraum (also $T_x \partial M$) steht. Somit gilt $w_m = \pm \nu$ auf $\tilde{U}$, und somit ist ν glatt nahe x_0 , welches beliebig gewählt worden ist.