

Vektoranalysis und gewöhnliche Differentialgleichungen,

Blat 1

Lösung 1

Sei

$$F : \mathbb{R}^{l \times l} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}, \quad F(A) := A^T A.$$

Dann gilt für die Jacobi-Matrix

$$F'(A) \in \text{Hom}(\mathbb{R}^{l \times l}, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}),$$

und für ein beliebiges $H \in \mathbb{R}^{l \times l}$,

$$F'(A)H = \left. \frac{d}{dt} F(A + tH) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (A + tH)^T (A + tH) \right|_{t=0} = H^T A + A^T H.$$

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können, dass E_l ein regulärer Wert von F ist, denn es gilt $\mathcal{O}(l) = F^{-1}(E_l)$. Sei also $A \in F^{-1}(E_l)$. Das heißt,

$$F(A) = A^T A = E_l.$$

Wir müssen zeigen, dass $F'(A)$ surjektiv ist. Sei dazu $S \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{l \times l}$ und setze

$$X := \frac{1}{2}AS.$$

Dann gilt:

$$F'(A)X = \left(\frac{1}{2}AS \right)^T A + A^T \left(\frac{1}{2}AS \right) = S.$$

Also ist $F'(A)$ surjektiv und der Beweis abgeschlossen.

Lösung 2

Sei der Nordpol $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^l$. Betrachte die Abbildung

$$i_N : \mathbb{R}^l \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^l \setminus \{N\}, \quad i_N(x) := N + \frac{2}{|x - N|^2}(x - N).$$

Diese Abbildung ist glatt und $i_N^{-1} = i_N$.

Behauptung: i_N bildet $\{x \in \mathbb{R}^l : x_l = 0\}$ bijektiv auf $\mathbb{S}^{l-1} \setminus \{N\}$ ab.

Ist dies gezeigt, so ist i_N^{-1} eine extrinsische Karte. Mit dem Südpol erhält man analog eine weitere Karte, die zusammen ganz $\mathbb{S}^{l-1}$ überdecken.

Beweis der Behauptung: Für $x \in \mathbb{R}^l \setminus \{N\}$ gilt:

$$\begin{aligned} |i_N(x)|^2 = 1 &\Leftrightarrow 1 + \frac{4}{|x - N|^2} \langle x - N, N \rangle + \frac{4}{|x - N|^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \langle x - N, N \rangle = -1 \Leftrightarrow \langle x, N \rangle = 0 \Leftrightarrow x_l = 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass i_N die Menge $\{x \in \mathbb{R}^l : x_l = 0\}$ nach $\mathbb{S}^{l-1} \setminus \{N\}$ abbildet (nach Voraussetzung injektiv). Da jeder Punkt $y \neq \{N\}$ von der Form $i_N(x)$ ist, ist diese Abbildung auch surjektiv und damit ist der Beweis abgeschlossen.

Bemerkung: Die bijektive Abbildung

$$p_N : \mathbb{R}^{l-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{l-1} \setminus \{N\}, \quad p_N(x) := i_N(x, 0), \quad x \mapsto i_N(x, 0)$$

lässt sich geometrisch interpretieren und wird stereographische Projektion genannt.

Lösung 3

Sei

$$M := \{x \in \mathbb{R}^l : |x| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^l.$$

Fall 1: $|a| < 1$

Dann wird

$$\{y : |y| < 1\} \rightarrow \{y : |y| < 1\} \quad y \mapsto y$$

eine (extrinsische) Karte vom Typ i).

Fall 2: $|a| = 1$

Da $\mathbb{S}^{l-1} \subset \mathbb{R}^l$ eine glatte UMF ist, existiert ein Diffeo $\psi : U \rightarrow V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^l$ offen und $a \in U$ und

$$\psi(U \cap \mathbb{S}^{l-1}) = V \cap (\mathbb{R}^{l-1} \times \{0\}).$$

Setze

$$U' := U \cap \mathbb{S}^{l-1}, \quad U'' := \{tx : x \in U', t \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)\},$$

und

$$\phi : U'' \rightarrow V'' := V \cap (\mathbb{R}^{l-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)), \quad tx \mapsto \psi(x) + (1 - t)e_l.$$

Man rechne nach, dass ϕ bijektiv ist mit

$$\phi^{-1} : V'' \rightarrow U'', \quad y + (1 - t)e_l \mapsto t \cdot \psi^{-1}(y)$$

wobei $y \in V \cap (\mathbb{R}^{l-1} \times \{0\})$ und $t \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Damit sieht man leicht, dass ϕ eine extrinsische Karte von Typ ii) ist.

Lösung 4

Angenommen:

$$\phi(M \cap U) = \{x \in V : x_{m+1} = \dots = x_l = 0\},$$

und

$$\phi(M \cap U) = \{x \in V : x_m \geq 0, x_{m+1} = \dots = x_l = 0\}, \quad \text{und} \quad \phi_m(a) = 0.$$

Die erste Gleichung impliziert, dass $\phi(M \cap U)$ offen ist in $\{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \dots = x_l = 0\}$. Die zweite Gleichung impliziert dagegen, dass $\phi(M \cap U) \subset \{x \in \mathbb{R}^l : x_m \geq 0, x_{m+1} = \dots = x_l = 0\}$ und

$$\varphi(a) \in \partial \{x \in \mathbb{R}^l : x_m \geq 0, x_{m+1} = \dots = x_l = 0\}.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass $\varphi(M \cap U)$ offen in $\{x \in \mathbb{R}^l : x_{m+1} = \dots = x_l = 0\}$ ist.

Lösung 5

Sei $a \in A$, und (a_n) eine Folge in A mit $d(a_n, a) \rightarrow 0$. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^l$ und eine glatte Fortsetzung $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass:

$$F|_{A \cap U} = f|_{A \cap U}.$$

Für alle hinreichend großen n gilt: $a_n \in A \cap U$ und somit $f(a_n) = F(a_n) \rightarrow F(a) = f(a)$. Daher ist f stetig in a .