

Aufgabe 1. Bezeichne $e_1, \dots, e_m$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^m$. Die i -te Spalte der Jacobimatrix

$$D\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)\left(\tilde{\phi}(a)\right)$$

ist gegeben durch

$$d\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)\left(\tilde{\phi}(a)\right)\left(e_i\right)=\sum_{\alpha=1}^m\left(\partial_i\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)_{\alpha}\right)\left(\tilde{\phi}(a)\right) e_{\alpha}.$$

Dann folgt per Definition, Kettenregel und Linearität des Differentials:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(a) &= d\left(\tilde{\phi}^{-1}\left(\tilde{\phi}(a)\right)\right)\left(e_i\right) \\ &= d\left(\left(\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)\left(\tilde{\phi}(a)\right)\right)\left(e_i\right) \\ &= d\left(\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi}(a)\right)\left(d\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)\left(\tilde{\phi}(a)\right)\left(e_i\right)\right) \\ &= d\left(\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\psi}(a)\right)\left(\sum_{\alpha=1}^m\left(\partial_i\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)_{\alpha}\left(\tilde{\phi}(a)\right)\right) e_{\alpha}\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m\left(\partial_i\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)_{\alpha}\left(\tilde{\phi}(a)\right)\right)\left(d\left(\tilde{\psi}^{-1}\right)\left(\tilde{\psi}(a)\right)\left(e_{\alpha}\right)\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^m\left(\partial_i\left(\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}\right)_{\alpha}\left(\tilde{\phi}(a)\right)\right) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}(a). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

($\Rightarrow$) Sei M orientierbar. Wir definieren

$$\mathcal{A}:=\left\{\left(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i\right):\left(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i\right) \text { ist positiv orientierte Karte auf } M\right\}.$$

Aus der Definition der Orientierbarkeit folgt, dass $\mathcal{A}$ die Mannigfaltigkeit M überdeckt. Sind also $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$ und $(\tilde{U}_j, \tilde{\phi}_j)$ zwei Karten aus $\mathcal{A}$ mit $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j \neq \emptyset$, so ist die Determinante der Übergangsmatrix der induzierten Basen in $T_a M$ für $a \in \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ strikt positiv. Nach Aufgabe 1 ist diese Determinante gerade durch die Jacobi-Determinante des Koordinatenübergangs gegeben.

($\Leftarrow$) Angenommen, $\mathcal{A}$ ist ein Atlas, der die obige Bedingung erfüllt und $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i) \in \mathcal{A}$. Wir definieren Orientierungen auf den Tangentialräumen durch

$$\mathfrak{D}_{T_a M}:=\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}(a)\right], \quad a \in \tilde{U}_i.$$

Da die Determinante der Übergangsmatrix zwischen zwei kanonischen Basen von Karten aus $\mathcal{A}$ strikt positiv ist, ist $\mathfrak{D}_{T_a M}$ korrekt definiert und erfüllt die Forderung aus der Definition.

Aufgabe 3-a.

Sei

$$\langle v, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle := \det(v, a_1, \dots, a_{m-1}).$$

Nun behaupten wir, dass das Skalarprodukt von $a_1 \times \cdots \times a_{m-1}$ mit jedem a_i gleich null ist. Nach Definition gilt

$$\langle a_i, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle = \det(a_i, a_1, \dots, a_{m-1}).$$

Hier enthält die Determinante zwei identische Spalten, da a_i mit einem der Vektoren aus $a_1, \dots, a_{m-1}$ übereinstimmt. Daraus folgt

$$\det(a_i, a_1, \dots, a_{m-1}) = 0,$$

was wiederum impliziert, dass $a_1 \times \cdots \times a_{m-1}$ orthogonal zu jedem a_i ist.

Aufgabe 3-b. Sei

$$\langle v, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle := \det(v, a_1, \dots, a_{m-1}).$$

Für die rechte Seite der Gleichung haben wir:

$$e_1 \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m(m-1)} \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m(m-1)} \end{vmatrix} + \cdots \pm e_m \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(m-1)1} & \cdots & \alpha_{(m-1)(m-1)} \end{vmatrix}$$

Für die linke Seite der Gleichung setzen wir zunächst $v = e_1$. Dann ergibt sich:

$$e_1 \langle e_1, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle = \det(e_1, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot e_1,$$

also:

$$e_1 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1(m-1)} \\ 0 & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m(m-1)} \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m(m-1)} \end{vmatrix}$$

Zweitens setzen wir $v = e_2$. Dann ergibt sich:

$$e_2 \langle e_2, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle = \det(e_2, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot e_2,$$

also:

$$e_2 \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1(m-1)} \\ 1 & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2(m-1)} \\ 0 & \alpha_{31} & \cdots & \alpha_{3(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m(m-1)} \end{vmatrix} = -e_2 \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m(m-1)} \end{vmatrix}$$

⋮

Schließlich setzen wir $v = e_m$. Dann ergibt sich:

$$e_m \langle e_m, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle = \det(e_m, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot e_m,$$

also:

$$e_m \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{(m-1)1} & \cdots & \alpha_{(m-1)(m-1)} \\ 1 & \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m(m-1)} \end{vmatrix} = \pm e_m \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(m-1)1} & \cdots & \alpha_{(m-1)(m-1)} \end{vmatrix}$$

Wie man sieht, erhält man in jedem Schritt $v = e_i$ jeweils die entsprechenden Terme der rechten Seite, was uns die Gleichheit beider Seiten zeigt.

Aufgabe 3-c. Zunächst bezeichnen wir das Volumen des von den Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ aufgespannten Parallelotops durch

$$\text{Vol}(P) := \sqrt{\det(AA^T)},$$

wobei A die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1(m-1)} & a_{2(m-1)} & a_{3(m-1)} & \cdots & a_{m(m-1)} \end{bmatrix}$$

ist, wobei a_{ij} die i -te Komponenten des Vektors a_j bezeichnet.

Daraus ergibt sich, dass wir die folgende Identität zeigen müssen:

$$|a_1 \times \cdots \times a_{m-1}|^2 = \det(AA^T).$$

Die Matrixmultiplikation ergibt sich wie folgt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1(m-1)} & a_{2(m-1)} & \cdots & a_{m(m-1)} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(m-1)} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(m-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(m-1)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AA^T = \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_{m-1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_{m-1}, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_{m-1}, a_{m-1} \rangle \end{bmatrix}$$

Nun wählen wir einen Einheitsvektor b , der zu allen a_i orthogonal ist. Wir betrachten die Matrix $\tilde{A}$, deren Zeilen aus $a_1, \dots, a_{m-1}, b$ bestehen.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^T = \begin{bmatrix} a_1^T & \cdots & a_{m-1}^T & b^T \end{bmatrix}$$

Dann ergibt sich das Produkt

$$\tilde{A}\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} AA^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wobei die linke obere $(m-1) \times (m-1)$ -Matrix gleich AA^T ist, die rechte untere Ecke 1 ist (da b normiert ist), und die anderen Einträge 0 sind, da b zu allen a_i orthogonal ist.

Folglich gilt:

$$\det(AA^T) = \det(\tilde{A}\tilde{A}^T) = \det(\tilde{A})^2.$$

Beachte, dass $a_1 \times \cdots \times a_{m-1}$ ein Vektor ist, der zu jedem a_i orthogonal ist, und daher ein Vielfaches von b ist, also $a_1 \times \cdots \times a_{m-1} = \lambda b$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt:

$$\lambda^2 = \langle a_1 \times \cdots \times a_{m-1}, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle = \lambda \langle b, a_1 \times \cdots \times a_{m-1} \rangle = \lambda \det(\tilde{A}).$$

Also ergibt sich schließlich:

$$\det(AA^T) = \det(\tilde{A})^2 = \lambda^2,$$

was die Behauptung zeigt.