

Antwort 1.

Sei das AWP gegeben durch:

$$y'(x) = 2xy(x), \quad y(0) = 1$$

Picard-Iteration:

1. Startiteration: $y_0(x) = 1$

2. Erste Iteration:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2ty_0(t)dt = 1 + \int_0^x 2t \cdot 1dt = 1 + [t^2]_0^x = 1 + x^2$$

3. Zweite Iteration:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \int_0^x 2ty_1(t)dt = 1 + \int_0^x 2t(1+t^2)dt \\ &= 1 + \int_0^x (2t + 2t^3)dt = 1 + \left[t^2 + \frac{t^4}{2} \right]_0^x = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

4. Dritte Iteration:

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + \int_0^x 2t \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \right) dt \\ &= 1 + \int_0^x (2t + 2t^3 + t^5) dt = 1 + \left[t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} \right]_0^x \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} \end{aligned}$$

5. Induktionsschritt: Angenommen für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$y_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{x^{2n}}{n!}$$

Dann für $k+1$:

$$\begin{aligned} y_{k+1}(x) &= 1 + \int_0^x 2t \sum_{n=0}^k \frac{t^{2n}}{n!} dt = 1 + \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \int_0^x 2t^{2n+1} dt \\ &= 1 + \sum_{n=0}^k \frac{x^{2n+2}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{k+1} \frac{x^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

6. Grenzwertbetrachtung:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2}$$

Lösung:

$$y(x) = e^{x^2}$$

Antwort 2.

Sei das AWP:

$$Y'(x) = AY(x), \quad Y(0) = I, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Picard-Iteration:

1. Startiteration: $Y_0(x) = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Erste Iteration:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= I + \int_0^x AY_0(t)dt = I + \int_0^x A dt \\ &= I + A \int_0^x dt = I + xA = \begin{pmatrix} 1+2x & x \\ 0 & 1+2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Zweite Iteration:

$$\begin{aligned} Y_2(x) &= I + \int_0^x AY_1(t)dt = I + \int_0^x A(I + tA)dt \\ &= I + A \int_0^x dt + A^2 \int_0^x t dt = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \end{aligned}$$

Berechnung von A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} Y_2(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2x+2x^2 & x+2x^2 \\ 0 & 1+2x+2x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Dritte Iteration:

$$\begin{aligned} Y_3(x) &= I + \int_0^x AY_2(t)dt = I + \int_0^x A \left(I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \right) dt \\ &= I + A \int_0^x dt + A^2 \int_0^x t dt + \frac{A^3}{2} \int_0^x t^2 dt \end{aligned}$$

Berechnung von A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Damit:

$$\begin{aligned} Y_3(x) &= I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{x^3}{6}A^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{x^3}{6} \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} & x + 2x^2 + 2x^3 \\ 0 & 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Allgemeine Form und Grenzwert:

(a) Induktionsbeweis für A^n :

Zeige zunächst durch vollständige Induktion:

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{für } n \geq 1$$

- *Induktionsanfang* ($n = 1$): Klar, da $A^1 = A = 2^0 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- *Induktionsschritt* ($n \rightarrow n + 1$):

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 4 & 2n+2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & n+1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Wegen (a) gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^k \frac{(2x)^j}{j!} & \sum_{j=0}^k \frac{(2x)^j x}{j!} \\ 0 & \sum_{j=0}^k \frac{(2x)^j}{j!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

(c) Dann ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems durch

$$y(x) = Y(x) \cdot y_0 = \begin{pmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \cdot y_0.$$

Antwort 3.

Gegeben ist das Anfangswertproblem (AWP)

$$y' = f(x, y) := \frac{1}{(x-1)^2 + (y-3)^2}, \quad y(0) = 0.$$

Ziel ist es zu zeigen, dass die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert. Zunächst ist $f(x, y)$ glatt auf $G := \mathbb{R}^2 \setminus (1, 3)$, somit existiert eine eindeutige maximal definierte Lösung $y(\cdot) : J \rightarrow \mathbb{R}$, mit einem offenen Intervall $0 \in J$. Wir zeigen: $|y(\cdot)| < 3/4$ auf J . Denn ist dann $[a, b] \subset J$ beliebig, so kann man das AWP $z' = f(x, z)$ mit $z(b) = y(b)$ betrachten. Wegen $(b, y(b)) \in G$ ist dieses wieder auf einem Intervall um b lösbar und stimmt dort mit $y(\cdot)$ wegen des Eindeutigkeitssatzes überein, d.h. $y(\cdot)$ kann beliebig nach rechts fortgesetzt werden (und analog nach links).

Wir schauen uns die DGL rechts von 0 an (analog verfährt man links). Wegen $y' = f(x, y) > 0$ ist $y(\cdot)$ streng monoton wachsend, also > 0 wegen des Anfangswertes. Angenommen, es gilt nicht $y(\cdot) < 3/4$ auf $J_0 := J \cap (0, \infty)$. Wähle das kleinste $x_0 \in J_0$ mit $y(x_0) = 3/4$. Für alle $s \in [0, x_0)$ gilt dann

$$y'(s) = \frac{1}{(s-1)^2 + (y(s)-3)^2} \leq \frac{1}{(s-1)^2 + (9/4)^2},$$

also

$$\begin{aligned} y(x_0) &= \int_0^{x_0} y'(s) ds \leq \int_0^\infty \frac{1}{(s-1)^2 + (9/4)^2} ds = \frac{4}{9} \arctan \left((s-1)/(9/4) \right) \Big|_0^\infty \\ &= (4/9)(\pi/2 + \arctan(4/9)) \approx 0.43... < 3/4, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.