PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1
ÜBUNG 1

Aufgabe 1 Seien Φ Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, d.h.,

$$\begin{aligned}\Phi := \Phi_2 : \Omega_2 := \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) &\to \Omega \subset \mathbb{R}^2\\ (r, \varphi) &\mapsto r \begin{bmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{bmatrix},\\ \Phi := \Phi_3 : \Omega_3 := \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) &\to \Omega \subset \mathbb{R}^3\\ (r, \varphi, \theta) &\mapsto r \begin{bmatrix}\cos(\varphi)\cos(\theta)\\ \sin(\varphi)\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Darstellungen $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\operatorname{div}}$, $\widetilde{\operatorname{rot}}$ und $\widetilde{\Delta}$ der klassischen kartesischen Diffentialoperatoren

$$\nabla, \quad \operatorname{div}, \quad \operatorname{rot}, \quad \Delta = \operatorname{div} \nabla$$

in Polarkoordinaten.

Anleitung: Seien $u \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $\widetilde{u} := u \circ \Phi$. Berechnen Sie zunächst mit der Kettenregel $\nabla \widetilde{u}$ und sodann denjenigen Differentialoperator $\widetilde{\nabla}$ (bzgl. der polaren Variablen) mit

$$\widetilde{\nabla u} = \widetilde{\nabla}\widetilde{u}.$$

Aufgabe 2 Seien $N \in \mathbb{N}$, $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ und $\psi \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}_+)$ sowie $r(x) := |x|$ für $x \in \mathbb{R}^N$.

(i) Zeigen Sie $u := \psi \circ r \in \mathsf{C}^2(\Omega)$ und

$$\Delta u = \big(\psi'' + \frac{N-1}{r}\psi'\big) \circ r.$$

(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen $u \in \mathsf{C}^2(\Omega)$ der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

der Gestalt $u = \psi \circ r$.

(iii) Zeigen Sie: Es gibt Konstanten $c_N > 0$, so dass alle Lösungen u aus **(ii)** die Abschätzung

$$|\partial^\alpha u| \leq c_N r^{2-N-|\alpha|}$$

für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $1 \leq |\alpha| \leq 2$ erfüllen.

Aufgabe 3 Seien $\Omega, \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ zwei Gebiete und $\Phi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^2-Diffeomorphismus. Außerdem sei $\mathrm{A} = -\operatorname{div} \alpha \nabla + \beta \nabla + \gamma$ ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung auf Ω mit Koeffizienten $\alpha_{nm}, \beta_n, \gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\alpha = \big[\alpha_{nm}\big]$, $\beta = \big[\beta_n\big]$. Ferner sei $\widetilde{\mathrm{A}}$ der transformierte Differentialoperator, d.h., für $u \in \mathsf{C}^2(\Omega)$ und $\widetilde{u} := u \circ \Phi$ gilt

$$\widetilde{\mathrm{A}\, u} = \widetilde{\mathrm{A}} \widetilde{u}.$$

Zeigen Sie: $\widetilde{\mathrm{A}}$ ist genau dann elliptisch, wenn A elliptisch ist, d.h.,

$$\exists\, \widehat{\alpha} > 0 \quad \forall\, x \in \Omega \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \qquad \big\langle \alpha(x)\xi, \xi \big\rangle_{\mathbb{R}^N} = \alpha_{nm}(x)\xi_n\xi_n \geq \widehat{\alpha}\, |\xi|^2_{\mathbb{R}^N}.$$

Aufgabe 4 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, $g \in \mathsf{C}^0(\Gamma)$ und

$$\mathsf{X}(\Omega) := \big\{ v \in \mathsf{C}^1(\overline{\Omega}) \,\big|\, v|_\Gamma = g \big\}.$$

Ferner seien $F \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ und $u \in \mathsf{X}(\Omega)$ ein lokales Extremum von

$$\mathcal{E} : \mathsf{X}(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}(v) := \int_\Omega F(\nabla v).$$

Zeigen Sie: Falls $u \in \mathsf{C}^2(\overline{\Omega})$, dann löst u das nichtlineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \big(\nabla F(\nabla u) \big) &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Was kommt für $F := |\cdot|^p$ raus?
(Hier darf die Differenzierbarkeit bei Null vernachlässigt werden.)