Fakultät Mathematik
Dirk Pauly

TUDD, SoSe 2025

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1
ÜBUNG 2

Aufgabe 1 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet und $u \in \mathsf{C}^2(\Omega)$ harmonisch in Ω, d.h., $\Delta u = 0$ in Ω.

Zeigen Sie: Für alle $x \in \Omega$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset \Omega$ gelten die Darstellungen

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon^{N-1}\omega_N} \int_{S_\varepsilon(x)} u = \frac{N}{\varepsilon^N \omega_N} \int_{U_\varepsilon(x)} u.$$

Hierbei sei ω_N das Maß der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^N$.

Aufgabe 2 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $u \in \mathsf{C}^2(\Omega)$ mit

$$u(x) = \frac{1}{\varepsilon^{N-1}\omega_N} \int_{S_\varepsilon(x)} u$$

für alle $x \in \Omega$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Zeigen Sie, dass u harmonisch ist.

Aufgabe 3 Seien $f, g \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)$ und $\varphi \in \mathring{\mathsf{C}}^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1.$$

Ferner sei

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-N} \varphi(x/\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Wir definieren die Faltung $f * g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ durch

$$f * g\,(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y)\, d\lambda_y, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Zeigen Sie:

(i) $f * g \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)$ und $\|f * g\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)}$.

(ii) $\|\varphi_\varepsilon * f\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\varphi\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)}$ für alle $\varepsilon > 0$.

(iii) $f \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R}^N)$ impliziert $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f$ lokal gleichmäßig, d.h., gleichmäßig auf kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}^N$.

(iv) $\varphi_\varepsilon * f \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f$ in $\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)$.

(v) $\varphi_\varepsilon * f \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^N)$ und $\partial^\alpha(\varphi_\varepsilon * f) = (\partial^\alpha \varphi_\varepsilon) * f$ für alle Multiindizes α.