PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1
ÜBUNG 3

Aufgabe 1 Seien $\varphi \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ gegeben.

(i) Finden Sie eine (die eindeutige) Lösung $u \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^2)$ der eindimensionalen Wellengleichung

(WG) $$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t,x) = 0 \qquad \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

welche den Anfangsbedingungen

(AB) $$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

genügt. (d'Alembert-Eulersche Formel)
Hinweis: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass u die Gestalt

$$u(t,x) = v(x+t) + w(x-t) \qquad \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^2$$

mit $v, w \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R})$ besitzen muß. (d'Alembertsche Formel)

(ii) Seien zusätzlich $\varphi', \psi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ die „Energie der Welle u zum Zeitpunkt t" durch

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \big(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\partial_x u(t,x)|^2\big)\,\mathsf{d}\lambda_x$$

erklärt. Zeigen Sie mit Hilfe von **(i)**, dass E konstant gleich

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \big(|\varphi'|^2 + |\psi|^2\big)\,\mathsf{d}\lambda$$

ist.

(iii) Gegeben seien nun ein fester Punkt $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ und zwei weitere Funktionen $\widetilde{\varphi} \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R})$, $\widetilde{\psi} \in \mathsf{C}^1(\mathbb{R})$ sowie eine weitere Lösung $\widetilde{u}$ der Wellengleichung, welche den Anfangsbedingungen

$$\widetilde{u}(0,x) = \widetilde{\varphi}(x), \quad \partial_t \widetilde{u}(0,x) = \widetilde{\psi}(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

genügt. In welchen Punkten müssen $\widetilde{\varphi}$ mit φ und $\widetilde{\psi}$ mit ψ übereinstimmen, damit

$$u(\tau,\xi) = \widetilde{u}(\tau,\xi)$$

gilt?

(iv) Welches $u \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^2)$ löst die Wellengleichung (WG) mit den Anfangsbedingungen (AB), wobei

$$\varphi(x) := \exp(-x^2), \qquad \psi(x) := (1+x^2)^{-1}$$

für $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben seien.

Aufgabe 2

(i) Sei $u \in \mathsf{C}^2\big(\mathbb{R} \times [0,\pi]\big)$ eine Lösung der Wellengleichung

(WG) $$(\partial_t^2 - \partial_x^2)u(t,x) = 0 \qquad \forall\,(t,x) \in \mathbb{R} \times (0,\pi),$$

die den Randbedingungen

(RB) $$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

genügt. Zeigen Sie, dass auch hier die Energie $E : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_{(0,\pi)} \big(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\partial_x u(t,x)|^2\big)\,\mathsf{d}\lambda_x$$

der Welle u konstant ist.

(ii) Wir wollen nun die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an u zu

$$u \in \mathsf{C}^2\big(\mathbb{R} \times (0,\pi)\big) \cap \mathsf{C}^1\big(\mathbb{R} \times [0,\pi]\big)$$

abschwächen. Zeigen Sie, dass die Energie auch unter diesen abgeschwächten Voraussetzungen konstant ist. Ein möglicher Lösungsweg ist die Approximation von E durch $E_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,\infty)$

$$E_\varepsilon(t) := \frac{1}{2}\int_{(\varepsilon,\pi-\varepsilon)} \big(|\partial_t u(t,x)|^2 + |\partial_x u(t,x)|^2\big)\,\mathsf{d}\lambda_x$$

mit $0 < \varepsilon \to 0$.

Aufgabe 3 Seien $I := (0,\infty)$ und $\Omega := (0,\pi)$. Wie in der Vorlesung für die Wellengleichung wollen wir eine Lösung u des Anfangsrandwertproblems (ARWP) zur Wärmeleitungsgleichung

$$\text{(WG)} \qquad (\partial_t - \partial_x^2)u(t,x) = 0 \qquad \forall\,(t,x) \in I \times \Omega,$$

die den Randbedingungen

$$\text{(RB)} \qquad u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \qquad \forall\, t \in I$$

und der Anfangsbedingung

$$\text{(AB)} \qquad u(0,x) = f(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

genügt, durch den bekannten Ansatz (Trennung der Variablen/Stehende Wellen)

$$u(t,x) = \varphi(t)\psi(x) \qquad \forall\,(t,x) \in \overline{I} \times \overline{\Omega}$$

finden. Zeigen Sie, dass das so gewonnene u in

$$\mathsf{C}^2(I \times \Omega) \cap \mathsf{C}^0(\overline{I} \times \overline{\Omega})$$

liegt und tatsächlich das (ARWP) löst, falls

$$f \in \mathsf{C}^0(\overline{\Omega}), \qquad f(0) = f(\pi) = 0$$

gelten, und die Fourierkoeffizienten

$$a_n := \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

eine absolut konvergente Reihe bilden, d.h.,

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty.$$

Zeigen Sie: Es gilt sogar $u \in \mathsf{C}^\infty(I \times \overline{\Omega})$. Außerdem folgt $u \in \mathsf{C}^\ell(\overline{I} \times \overline{\Omega})$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, falls

$$\sum_{n=1}^\infty n^{2\ell}|a_n| < \infty.$$

Aufgabe 4 Wir wollen eine (die) Grundlösung zur Wärmeleitungsgleichung

$$(\partial_t - \Delta_x)u = 0, \quad u \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$$

finden. Machen Sie dazu den Ansatz

$$u(t,x) := t^\lambda f\big(t^\mu |x|\big).$$

Hinweis: $\mu = -1/2$, $\lambda = -N/2$ und $s = r/\sqrt{t}$