Fakultät Mathematik
Dirk Pauly

TUDD, SoSe 2025

PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1
ÜBUNG 4

Aufgabe 1 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, $\mathrm{A} := a_{ij}\partial_i\partial_j + a_i\partial_i$ ein gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperator mit dem üblichen Voraussetzungen und $u \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}^0(\overline{\Omega})$ mit $\mathrm{A}\,u > 0$ in Ω. Aus der Vorlesung wissen wir, dass u ihr Maximum auf dem Rand annimmt, falls Ω beschränkt ist. Zeigen Sie:

Ist Ω unbeschränkt, so ist entweder u negativ in $\overline{\Omega}$, oder u nimmt sein Maximum auf dem Rand an, falls $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, $a_{ij}, a_i \in \mathsf{C}^0(\overline{\Omega})$, und $\mathrm{A} := a_{ij}\partial_i\partial_j + a_i\partial_i$ ein gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperator mit dem üblichen Voraussetzungen. Ferner seien $u, v \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}^0(\overline{\Omega})$ mit $\mathrm{A}\,u \geq 0$ und $\mathrm{A}\,v \leq 0$ in Ω. Zeigen Sie:

$$u \leq v \text{ in } \overline{\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad u \leq v \text{ auf } \Gamma$$

Aufgabe 3 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet und

$$f \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad \pm f|_{\mathbb{R}_\pm} > 0.$$

Ferner erfülle $u \in \mathsf{C}^2(\Omega) \cap \mathsf{C}^0(\overline{\Omega})$ in Ω die Differentialgleichung

$$\Delta u = f(u).$$

Zeigen Sie, dass u genau dann verschwindet, wenn u auf dem Rand Γ verschwindet.

Aufgabe 4 Wir wollen das Maximumsprinzip für parabolische Gleichungen zeigen: Seien Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^N$ und $\Omega_0 := \{0\} \times \Omega$ sowie

$$\Omega_t := \{t\} \times \Omega, \qquad \Xi_t := I_t \times \Omega, \qquad \Gamma_t := I_t \times \Gamma, \qquad I_t := (0, t)$$

für alle $t > 0$. Für $T > 0$ betrachten wir den parabolischen partiellen Differentialoperator

$$\mathrm{A}(t, x; \partial) := a_{ij}(t, x)\partial_i\partial_j + a_i(t, x)\partial_i - \partial_t, \qquad (t, x) \in \Xi_T,$$

mit Koeffizienten, die $a_{ij} = a_{ji}$ und

$$\forall\, (t, x) \in \Xi_T \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \qquad a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j > 0$$

erfüllen, und Hauptteil

$$\widetilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a & \\ 0 & & \end{bmatrix} : \Xi_T \to \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}.$$

Ferner sei

$$u \in \mathsf{C}^2(\Xi_T) \cap \mathsf{C}^0(\overline{\Xi}_T \setminus \Omega_T).$$

Zeigen Sie:

(i) Sei $\mathrm{A}\, u > 0$ bzw. $\mathrm{A}\, u < 0$ in Ξ_T. Dann gilt das Maximumsprinzip für alle $0 < \tau < T$, d.h.,

$$\forall\, \tau \in I_T \qquad \max_{\overline{\Xi}_\tau} u = \max_{\overline{\Gamma}_\tau \cup \Omega_0} u \qquad \text{bzw.} \qquad \min_{\overline{\Xi}_\tau} u = \min_{\overline{\Gamma}_\tau \cup \Omega_0} u.$$

Sei A außerdem gleichmäßig stark elliptischer, d.h., $a_{ij}, a_i \in \mathsf{C}^0(\overline{\Xi}_T)$ und

$$\exists\, \widehat{a} > 0 \quad \forall\, (t, x) \in \Xi_T \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \qquad a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \geq \widehat{a}|\xi|^2.$$

(ii) **(i)** gilt auch für $\mathrm{A}\, u \geq 0$ bzw. $\mathrm{A}\, u \leq 0$.

(iii) **(ii)** gilt auch für $\tau = T$, falls zusätzlich $u \in \mathsf{C}^0(\overline{\Xi}_T)$.

Seien $\widetilde{\Gamma}_T := [0, T) \times \Gamma$ und $f \in \mathsf{C}^0(\Xi_T)$, $g \in \mathsf{C}^0(\widetilde{\Gamma}_T)$ und $h \in \mathsf{C}^0(\Omega)$.

(iv) Die Wärmeleitungsgleichung, d.h.,

(DG) $$(\partial_t - \Delta_x)u = f \qquad \text{in } \Xi_T,$$

(RB) $$u = g \qquad \text{auf } \widetilde{\Gamma}_T,$$

(AB) $$u(0, \cdot\,) = h \qquad \text{in } \Omega$$

hat höchstens eine Lösung in $\mathsf{C}^2(\Xi_T) \cap \mathsf{C}^0(\overline{\Xi}_T \setminus \Omega_T)$.