

Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

September 2026

Übersicht Beweismethoden

Was ist ein Beweis?

Kurz gesagt ist ein Beweis eine Rechtfertigung dafür, warum eine getätigte Aussage wahr ist. Etwas formaler ausgedrückt ist es eine Abfolge von logischen Schritten, die klar machen, warum eine Aussage aus einer anderen (wahren Aussage) folgt. Was genau logische Schritte sind, führt man im Gebiet der mathematischen Logik weiter aus.

Beweismethoden

Auch wenn es für Beweise kein „Kochrezept“ oder ein Standardverfahren gibt, haben sich mit der Zeit einige Strategien herauskristallisiert:

Direkter Beweis Die Beweisschritte führen hier, anders als bei den meisten folgenden Beweisarten, auf direktem Weg zum endgültigen Beweis.

Beispiel. Die Gleichung $ax + b = 0$ hat für $a \neq 0$ genau eine Lösung¹

Beweis. $ax + b = 0 \xrightarrow{-b} ax = -b \xrightarrow{\cdot \frac{1}{a}} x = -\frac{b}{a}$ □

Wir haben nun direkt gezeigt, dass die Gleichung eine Lösung hat, indem wir die Lösung konstruiert haben.

Konstruktiver Beweis Der konstruktive Beweis ist eine besonders schöne Art von Beweis, da uns gleich eine Lösung des Problems mitgeliefert wird. Wenn wir uns zum Beispiel fragen, ob eine bestimmte Art Gleichung lösbar ist, würde man hier die Lösbarkeit beweisen, indem man eine Lösung findet. (Achtung: häufig auch direkt, aber nicht immer!) Diese Art von Beweis kann man auch sehr gut für Gegenbeweise, also Beweise verwenden, die zeigen, dass eine getätigte Aussage falsch ist, indem man ein explizites Gegenbeispiel konstruiert.

Beispiel. Das eben gezeigte Beispiel ist nicht nur ein direkter, sondern auch ein konstruktiver Beweis.

Widerspruchsbeweis Hier trifft man zuerst die Annahme, dass eine Aussage falsch wäre, auch wenn man eigentlich vermutet, dass sie wahr ist. Dann folgert man aus der (falschen) Annahme eine falsche Aussage. Da aus einer wahren Aussage nur Wahres folgen kann führt dies zum Konflikt mit der Ausgangsannahme. Das nennen wir dann den Widerspruch. Wenn aus einer Aussage also etwas Falsches folgt, muss die Ausgangsaussage ebenfalls falsch gewesen sein.

Wir schauen uns nun ein sehr klassisches Beispiel für diese Beweisart an:

¹Eigentlich müsste man für die allgemeine Gültigkeit noch $a, b \in \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ ein Körper ist, fordern. Da wir aber noch nicht wissen was ein Körper ist, ignorieren wir das erstmal. Die relevanten Annahmen sind stattdessen: zu a gibt es ein $\frac{1}{a}$ und zu b ein $-b$.

Beispiel. $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis. Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational. Dann existieren ganze Zahlen p, q mit $\text{ggT}(p, q) = 1$, sodass gilt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Wir quadrieren beide Seiten und erhalten $2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$. Daraus folgt, dass p^2 gerade ist, also auch p gerade. Wir setzen $p = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und erhalten $p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. (Diese Umformung dürfen wir machen, da $\frac{1}{2}$ eine rationale Zahl ist.) Also ist auch q^2 gerade und somit q gerade.

Damit sind p und q beide gerade und der $\text{ggT}(p, q) \geq 2$, was im Widerspruch zur Annahme $\text{ggT}(p, q) = 1$ steht. $\nmid$ □

Fallunterscheidung Manchmal kann man Probleme in verschiedene Klassen einteilen. Falls das geht, ist es oft leichter eine Aussage einzeln in diesen Klassen zu beweisen und damit zu zeigen, dass sie in jedem Fall richtig ist.

Beispiel. Der Term $n^2 + 3n + 7$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ ungerade.

Beweis. Fall 1 Sei n gerade:

Da n gerade ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2k$. Damit ist $n^2 + 3n + 7 = (2k)^2 + 3(2k) + 7 = 4k^2 + 6k + 7 = 2(2k^2 + 3k + 3) + 1$. Nun benennen wir nun noch den Term $2k^2 + 3k + 3$ in m und erhalten $n^2 + 3n + 7 = 2m + 1$, was eine ungerade Zahl ist.

Fall 2 Sei n ungerade:

Da n ungerade ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2k + 1$. Wie gehen analog zu Fall 1 vor und erhalten: $n^2 + 3n + 7 = (2k + 1)^2 + 3(2k + 1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 7 = 2(2k^2 + 5k + 5) + 1 = 2m + 1$, was ebenfalls eine ungerade Zahl ist. Da natürliche Zahlen nur gerade oder ungerade sein können, folgt die Behauptung. □

Kontraposition Bei einem Beweis durch Kontraposition wird eine Implikation $A \Rightarrow B$ nicht direkt gezeigt. Stattdessen beweist man die logisch äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$. Das ist besonders dann hilfreich, wenn sich die Verneinung der Aussage einfacher handhaben lässt als die ursprüngliche Behauptung.

Beispiel. Wir zeigen: Ist a^2 gerade, so ist a gerade.

Direkt ist die Aussage zunächst etwas unhandlich. Wir betrachten daher die Kontraposition: Ist a ungerade, so ist a^2 ungerade.

Sei also $a = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Also ist a^2 ungerade. Damit ist die Kontraposition und somit auch die ursprüngliche Aussage bewiesen.

Vollständige Induktion Die vollständige Induktion eignet sich besonders für Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen ab einem bestimmten Startwert gelten sollen. Die Idee besteht aus zwei Schritten: Zunächst zeigt man die Aussage für einen Anfangswert (Induktionsanfang). Anschließend nimmt man an, dass sie für ein bestimmtes n bereits gilt (Induktionsvoraussetzung), und zeigt daraus, dass sie dann auch für $n + 1$ gilt (Induktionsschritt).

Sind beide Schritte gezeigt, folgt die Aussage für alle betrachteten natürlichen Zahlen.

Beispiel. Wir zeigen für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsschritt: Dann gilt

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Damit gilt die Formel auch für $n+1$. Also gilt sie für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. Will man die Äquivalenz, also die Gleichwertigkeit, von zwei Aussagen a und b zeigen, muss man sowohl $a \Rightarrow b$, als auch $b \Rightarrow a$ zeigen².

²Man sagt auch die „Hinrichtung“ und die „Rückrichtung“