

Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

1. Übung am 25. September 2026

Thema: Logik und Mengen

Vorbereitungsaufgaben: 1, 2

Schwerpunktaufgaben: 3, 4, 6, 7, 8

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit grundlegenden Begriffen der Logik und Mengenlehre. Wir lernen erste Elemente dieser mathematischen Sprache, die wir im Laufe des Studiums noch viel verwenden und vertiefen werden. Unser Ziel ist mathematische Aussagen präzise lesen, formulieren und begründen zu können. Dabei werden uns unter anderem die Begriffe *Aussage*, *Wahrheitswert*, *Aussageform*, *Negation*, *Konjunktion*, *Disjunktion*, *Implikation*, *Äquivalenz*, *Quantor*, *Menge*, *Teilmenge*, *Durchschnitt* und *Vereinigung* begegnen.

Passende Literatur:

- Abschnitt 1.1 zum Thema Logische Grundlagen und Aussagen und Abschnitt 1.3 zum Thema Mengen im Lehrbuch
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Kapitel 2 zum Thema Mengenlehre im Lehrbuch
Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 1.2.1 sowie 1.2.2 zum Thema Logik und Abschnitt 1.1 zum Thema Mengenlehre im Lehrbuch
Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

Aufgabe 1

Welche der folgenden Wort- beziehungsweise Zeichengruppen sind Aussagen? Geben Sie gegebenenfalls den Wahrheitswert an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- | | |
|--|--|
| (a) Alle reellen Zahlen sind rational. | (b) Alle rationalen Zahlen sind reell. |
| (c) $3 \leq 7$. | (d) $x \leq 7$ |
| (e) $\frac{\pi}{2} > 1$ | (f) $x = 1$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$. |
| (g) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$. | (h) a ist durch 3 teilbar. |

Welche derjenigen Wort- beziehungsweise Zeichengruppen, die keine Aussagen sind, kann man als *Aussageformen* auffassen?

Aufgabe 2

Formulieren Sie die folgenden Aussagen, die unter Verwendung der Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor) gegeben sind, mit Worten und bestimmen Sie ihren Wahrheitswert. Mit $\mathbb{N} =$

$\{1, 2, 3, \dots\}$ wird dabei die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet (beginnend bei 1), mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

- | | |
|--|--|
| (a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ | (b) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 2$ |
| (c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ | (d) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ |
| (e) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 2n$ | (f) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 2n$ |
| (g) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y \leq x$ | (h) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y \leq x$ |

Vergleichen Sie insbesondere die letzten beiden Aussagen. Welche Rolle spielt die Reihenfolge der Quantoren?

Aufgabe 3

Seien p , q und r beliebige Aussagen.

- Erstellen Sie Wahrheitstabellen für $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$.
- Zeigen Sie mithilfe einer Wahrheitstafel: $p \Rightarrow q \iff \neg p \vee q$.
- Zeigen Sie: $p \Rightarrow q \iff \neg q \Rightarrow \neg p$.
- Folgern Sie nun die De-Morganschen Gesetze:

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q \quad \text{und} \quad \neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q.$$

Welche Verbindung sehen Sie zwischen Teil (c) und der Beweistechnik der *Kontraposition*?

Aufgabe 4

- Verneinen Sie die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y, z \in \mathbb{R} : x = y + z.$$

Formulieren Sie sowohl die ursprüngliche Aussage als auch ihre Verneinung in *eigenen* Worten. Welchen Wahrheitswert besitzen die beiden Aussagen?

- Sei allgemeiner $q(x, y, z)$ eine Aussageform. Dabei bedeutet $q(x, y, z)$ das q eine Struktur vorgibt, in der x , y und z als eine Art Variablen vorkommen. Verneinen Sie

$$\forall x \exists y, z : q(x, y, z).$$

Welches allgemeine Prinzip zur Verneinung von Aussagen mit Quantoren fällt auf?

- Sei $p(x, y)$ eine Aussageform. Finden Sie ein konkretes Beispiel, an dem man erkennt, dass

$$\forall x \exists y : p(x, y) \quad \text{und} \quad \exists y \forall x : p(x, y)$$

im Allgemeinen nicht dasselbe aussagen.

Aufgabe 5

Für eine natürliche Zahl n betrachten wir die folgenden Aussagen:

- A : „ n ist durch 6 teilbar.“
 B : „ n ist sowohl durch 3 als auch durch 2 teilbar.“
 C : „ n ist durch 3 teilbar.“

Untersuchen Sie, welche der Aussagen A, B, C *hinreichend*, bzw. *notwendig* für eine andere Aussage oder sogar *äquivalent* zu einer anderen Aussage sind.

Formulieren Sie Ihre Ergebnisse anschließend mithilfe von $\Rightarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$ und versuchen Sie allgemein zu formulieren, wie die Begriffe *hinreichend*, *notwendig*, *Implikation* und *Äquivalenz* zusammenhängen.

Aufgabe 6

In den folgenden Teilaufgaben sind jeweils zwei Mengen A und B gegeben.
Bestimmen Sie jeweils

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A.$$

Entscheiden Sie außerdem, ob A und B disjunkt sind und ob eine der Mengen eine Teilmenge der anderen ist.

$$\begin{array}{ll} (a) & A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{2, 4, 6\}. \\ (b) & A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad B = \{1, 3, 5\}. \\ (c) & A = \{1, 4, 9, 16, 25\} \quad B = \{2, 3, 5, 7, 11\} \end{array}$$

Aufgabe 7

Seien A , B und C beliebige Mengen.

- (a) Zeigen Sie: $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
- (b) Zeigen Sie: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- (c) Zeigen Sie: $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

Hinweis: Beginnen Sie bei den Mengengleichheiten mit einem beliebigen Element x und untersuchen Sie, wann x zur linken bzw. rechten Seite gehört.

Vergleichen Sie dabei Ihre Argumentation mit den logischen Gesetzen aus Aufgabe 3.

Aufgabe 8

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad D = \{3\},$$

sowie

$$E = \{1, B, D\}, \quad F = \{1, 3, B\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$\begin{array}{lll} 3 \in B, & 3 \in E, & 1 \in E, \\ \{1\} \subseteq E, & \{3\} \in E, & B \subseteq A, \\ D \in E & D \subseteq B & D \in B \\ B \in F, & \emptyset \subseteq D, & A \cap B = B \end{array}$$

Erklären Sie abschließend in eigenen Worten den Unterschied zwischen $x \in A$ und $\{x\} \subseteq A$.

Versuchen Sie bei allen Aufgaben nicht nur zu entscheiden, ob eine Aussage richtig ist, sondern vor allem zu verstehen, warum genau.

Zusatzaufgabe (Wann sind zwei Mengen gleich?)

Seien A und B zwei Mengen.

Wir wollen die Aussage $A = B \iff \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ genauer verstehen.

- (a) Formulieren Sie die rechte Seite der Äquivalenz mit Worten.
- (b) Zeigen Sie: $A = B \implies \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

(c) Zeigen Sie umgekehrt: $\forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \implies A = B$.

Verwenden Sie dazu $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

(d) Wenden Sie das Ergebnis an, um die Identität $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ zu beweisen.

Schreiben Sie dabei jeden Schritt zunächst als Aussage über ein beliebiges Element x .

Zusatzaufgabe (Cantors Satz über die Potenzmenge)

Wir wollen nun das heute Gelernte anwenden und einen „richtigen“ mathematischen Satz beweisen. Achten Sie bei jedem Schritt darauf, dass Sie nicht nach Gefühl oder Beispiel entscheiden ob die Argumente zulässig sind, sondern stets kritisch hinterfragen und versuchen genau zu verstehen was passiert.

Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von M . Wir wollen zeigen, dass es keine Abbildung

$$f: M \rightarrow \mathcal{P}(M),$$

geben kann, die jeden Wert aus der Zielmenge mindestens einmal annimmt.

Nehmen Sie dazu zunächst zum Widerspruch an, es gäbe eine solche surjektive Abbildung f .

(a) Erklären Sie in eigenen Worten, was diese Zusatzbedingung für

$$f: M \rightarrow \mathcal{P}(M)$$

bedeutet und versuchen Sie die Aussage beispielhaft zu visualisieren.

Was sind insbesondere die Elemente der Zielmenge von f ?

(b) Für jedes $x \in M$ ist $f(x)$ eine Teilmenge von M . Daher ist die Aussage $x \in f(x)$ sinnvoll.

Betrachten Sie nun die Menge $D := \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$ und zeigen Sie zunächst, dass $D \in \mathcal{P}(M)$.

(c) Da wir von f fordern, dass es jeden Wert der Zielmenge annimmt und $D \in \mathcal{P}(M)$ gilt, muss es ein $d \in M$ geben mit $f(d) = D$.

Wir wollen nun untersuchen, ob $d \in D$ gilt.

Zeigen Sie zunächst: $d \in D \iff d \notin f(d)$.

(d) Verwenden Sie nun $f(d) = D$ und zeigen Sie, dass daraus $d \in D \iff d \notin D$ folgen würde.

Warum ist dies unmöglich?

(e) Welche Annahme muss daher falsch gewesen sein?

Formulieren Sie das bewiesene Resultat vollständig in Worten.

(f) Was sagt das Resultat anschaulich über die Anzahl der Elemente von M und $\mathcal{P}(M)$ aus?

Testen Sie diese Aussage zunächst für $M = \{1, 2, 3\}$.

Listen Sie dazu alle Elemente von $\mathcal{P}(M)$ auf.

Zum Weiterdenken: Der Beweis verwendet keine Annahme darüber, ob M endlich oder unendlich ist. Was bedeutet das für unendliche Mengen? Gibt es vielleicht ein einfacheres Argument für endliche Mengen, das im Unendlichen schiefgeht?