

Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

2. Übung am 25. September 2026 Thema: Terme und (Un-)Gleichungen

Vorbereitungsaufgaben: 1, 3, 7

Schwerpunktaufgaben: 2, 5, 8, 9

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit Termumformungen sowie mit dem Lösen von Gleichungen und Ungleichungen über den reellen Zahlen.

Neben dem sicheren Umgang mit Rechenregeln soll insbesondere darauf geachtet werden, unter welchen Voraussetzungen Umformungen zulässig sind, wie Lösungsmengen beschrieben werden und weshalb einzelne Rechenschritte die Lösungsmenge erhalten oder verändern können.

Passende Literatur:

- Abschnitte 2.1, 4.1, 5.5, 6.1 sowie 10.1 bis 10.3 im Lehrbuch
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Abschnitte 1.2, 3.1, 6.1, 6.2, 6.7, 8.1 und 8.2 im Lehrbuch
Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 1.5, 1.6, 2.1 bis 2.5 sowie 2.10 im Lehrbuch
Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

Aufgabe 1

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich. Formen Sie dazu gegebenenfalls Zähler und Nenner durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren oder durch Rückwärtsanwenden einer binomischen Formel geeignet um.

$$\begin{array}{ccc} \frac{ab-b}{ab+b} & \frac{ax-ay}{5x-5y} & \frac{2x-4y}{3x-6y} \\ \frac{u-v}{v-u} & \frac{x^2+x}{x^2-1} & \frac{(u-v)^2}{u^2-v^2} \\ \frac{s^2-4t^2}{s^2-4st+4t^2} & \frac{9a^2+6a+1}{1+3a} & \frac{16-49x^2}{16-28x} \end{array}$$

Geben Sie bei jeder Teilaufgabe an, für welche Werte der Variablen der ursprüngliche Term überhaupt definiert ist.

Aufgabe 2

Schreiben Sie die folgenden Terme jeweils in einer möglichst geeigneten Form.

- (a) Multiplizieren Sie aus: $(2x + 3y)(5x + 2y)$.
- (b) Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen: $(a + b)(2a - 3b) - (3a + 2b)(a - b)$.

- (c) Schreiben Sie als Produkt: $21x^2 - 14xy$.
- (d) Schreiben Sie mithilfe einer binomischen Formel als Quadrat: $x^2 + 4x + 4$.
- (e) Schreiben Sie als Produkt: $100x^2 - y^2$.
- (f) Schreiben Sie als Quadrat: $25x^2 - 30xy^2 + 9y^4$.

Diskutieren Sie anschließend: Wann ist die ausmultiplizierte Form eines Terms nützlich und wann ist eine Produktdarstellung günstiger?

Aufgabe 3

Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

- (a) $3x = 15$ (b) $2x - 4 = 3x + 9$ (c) $1 - x = 5x + 19$
- (d) $2(x - 1) = x + 7$ (e) $x - 3(1 + x) = 25$ (f) $x + 4 = 4(x + 1) - 3x$
- (g) $x + 4 = 4(x - 1) - 3x$ (h) $5x + 3(x + 2) = 4(1 - x) + 10$

Achten Sie insbesondere auf die Teilaufgaben (f) und (g).

Was kann beim Lösen einer linearen Gleichung außer dem Fall „genau eine Lösung“ noch auftreten?

Aufgabe 4

Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen.

- (a) $3x \leq 15$ (b) $x + 6 \geq 2x - 9$ (c) $3(x - 1) + 7 \geq 2(4 - x) + 1$

Inwiefern ändern sich die Lösungsmengen, wenn jeweils $\leq$ durch $<$ bzw. $\geq$ durch $>$ ersetzt wird? Erklären Sie außerdem, weshalb sich bei einer Multiplikation oder Division einer Ungleichung mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umkehren muss.

Aufgabe 5

Eine quadratische Funktion besitzt die Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

an

- (a) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine quadratische Gleichung mit
- (a1) genau zwei reellen Lösungen,
 - (a1) genau einer reellen Lösung,
 - (a1) keiner reellen Lösung an.

Deuten Sie die drei Fälle geometrisch anhand einer Parabel.

- (b) Ermitteln Sie anschließend alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} x^2 - 9 = 0, & 2x^2 + x = 0, & x^2 + 2x - 8 = 0, \\ x^2 + 2x + 5 = 0, & 2x^2 + x - 1 = 0, & (x - 4)(x + 7) = 0 \end{array}$$

Versuchen Sie nicht, für alle Gleichungen automatisch dieselbe Lösungsmethode anzuwenden. Entscheiden Sie zunächst, welche Struktur der jeweiligen Gleichung eine möglichst einfache Lösung erlaubt.

Aufgabe 6

Ermitteln Sie alle Lösungen der folgenden Ungleichungen.

$$\begin{array}{ll} x^2 - 4x + 3 \leq 0, & 2x^2 - 3x - 2 \geq 0, \\ x^2 - 4x + 4 \geq 0, & 5x - x^2 \geq 4 \end{array}$$

Inwiefern ändern sich die Lösungsmengen, wenn jeweils $\leq$ durch $<$ bzw. $\geq$ durch $>$ ersetzt wird? Versuchen Sie, Ihre Ergebnisse sowohl rechnerisch als auch anhand des Verlaufs einer geeigneten Parabel zu erklären.

Aufgabe 7

Sei zunächst $b > 0$.

- (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $|x| = b$ gilt.
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $|x| \leq b$ gilt.
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die $|x| \geq b$ gilt.
- (b) Deuten Sie die drei Lösungsmengen als Abstände auf dem Zahlenstrahl.
Seien nun $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$.
Bestimmen und deuten Sie entsprechend die Lösungsmengen von

$$|x - a| = b, \quad |x - a| \leq b, \quad |x - a| \geq b.$$

- (c) Wenden Sie Ihre Ergebnisse anschließend auf

$$|x - 3| = 2, \quad |x + 1| \leq 3, \quad |x + 4| \geq 1$$

an.

Aufgabe 8

Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

Führen Sie jeweils eine geeignete Fallunterscheidung hinsichtlich des Vorzeichens des Ausdrucks im Betrag durch.

$$\begin{array}{ll} |3x - 7| - 5 = 0 & |x + 1| = 2x - 3 \\ |2x - 8| - x + 3 = 0 & |2x + 1| = x - 1 \end{array}$$

Überprüfen Sie Ihre gefundenen Lösungen anschließend in der ursprünglichen Gleichung.

Aufgabe 9

In den folgenden Rechnungen wurde jeweils ein Fehler gemacht.

Finden Sie den *ersten* fehlerhaften Schritt, erklären Sie möglichst genau, weshalb dieser Schritt nicht zulässig ist, und lösen Sie die Aufgabe anschließend korrekt.

- (a) Gesucht seien alle Lösungen von $x^2 = 9$. Es wird gerechnet:

$$x^2 = 9 \implies x = 3.$$

- (b) Gesucht seien alle Lösungen von $(x + 3)^2 = 25$. Es wird gerechnet:

$$(x + 3)^2 = 25 \implies x + 3 = 5 \implies x = 2.$$

(c) Gesucht seien alle Lösungen von $\frac{x}{x+4} = 3$. Es wird gerechnet:

$$\frac{x}{x+4} = 3 \implies x = 3x + 4 \implies x = -2.$$

Unterscheiden Sie bei Ihrer Erklärung zwischen

- einem Rechenfehler,
- einer nicht äquivalenten Umformung und
- einer nicht beachteten Definitionsbedingung.

Zusatzaufgabe (Nützliche algebraische Identitäten)

Beweisen Sie die folgenden Identitäten und geben Sie jeweils an, für welche Werte der Variablen die auftretenden Terme definiert sind.

(a)

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

(b) Für $x \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(c) Für $a, b > 0$ gilt:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

(d) Für $x \neq 0$ gilt:

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x - 1)^2}{x}.$$

(e) Für $x \neq 0$ gilt:

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{(x + 1)^2}{x}.$$

Zum Weiterdenken: Warum können solche Umformungen später nützlich sein, obwohl sie auf den ersten Blick nur andere Schreibweisen desselben Ausdrucks liefern?

Zusatzaufgabe (Geschicktes Umformen)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a)

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1.$$

(b)

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a}, \quad x \neq a.$$

(c)

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}, \quad x > 0, a > 0, x \neq a.$$