

# Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

## 3. Übung am 28. September 2026 Thema: Lineare Gleichungssysteme

Vorbereitungsaufgaben: 1, 7

Schwerpunktaufgaben: 2, 3, 4, 5

In dieser Übung beschäftigen wir uns mit linearen Gleichungssystemen. Dabei soll nicht nur das rechnerische Lösen geübt werden. Wir wollen insbesondere verstehen,

- welche Lösungsfälle auftreten können,
- warum die beim Gauß-Verfahren verwendeten Umformungen die Lösungsmenge nicht verändern,
- wie sich Lösungsmengen geometrisch interpretieren lassen,
- und wie freie Variablen bzw. Parameter entstehen.

### Passende Literatur:

- Abschnitte 2.2, 5.2 bis 5.4, 10.5 und 12.1 bis 12.3 im Lehrbuch  
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Abschnitte 3.2 bis 3.4, 4.1, 6.3, 6.4 und 6.10 im Lehrbuch  
Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 1.7, 1.9, 2.7 und 2.9 im Lehrbuch  
Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

### Aufgabe 1

Untersuchen Sie für jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme, ob es *genau eine Lösung*, *unendlich viele Lösungen* oder *keine Lösung* besitzt.

Geben Sie im Falle der Lösbarkeit alle Lösungen an und deuten Sie Ihr Ergebnis jeweils geometrisch.

$$\begin{array}{llll} (a) \ x + y = 2, & (b) \ 3x - 6y = 7, & (c) \ 2x - y = 1, & (d) \ 3x = 4y - 15, \\ 2x - 3y = 9. & -2x + 4y = -1. & -4x + 2y = -2. & 5y = 11 - 4x. \end{array}$$

Vergleichen Sie die vier Systeme miteinander.

Woran erkennt man während des Lösungsverfahrens die drei möglichen Fälle?

### Aufgabe 2

Beim Lösen eines linearen Gleichungssystems werden typischerweise die folgenden Operationen verwendet:

1. Vertauschen zweier Gleichungen,

2. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ ,
3. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Wir wollen verstehen, warum diese Operationen die Lösungsmenge nicht verändern.

- (a) Betrachten Sie zunächst das System

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2.\end{aligned}$$

Warum verändert das Vertauschen der beiden Gleichungen die Lösungsmenge nicht?

- (b) Sei  $\lambda \neq 0$ . Begründen Sie, warum

$$a_1x + b_1y = c_1$$

und

$$\lambda a_1x + \lambda b_1y = \lambda c_1$$

dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Warum ist die Voraussetzung  $\lambda \neq 0$  notwendig?

- (c) Ersetzen wir die zweite Gleichung durch die Summe aus der zweiten Gleichung und dem  $\lambda$ -fachen der ersten, so erhalten wir

$$(a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y = c_2 + \lambda c_1.$$

Zeigen Sie, dass jedes Lösungspaar des ursprünglichen Systems auch das neue System löst.

- (d) Begründen Sie auch die umgekehrte Richtung.

*Hinweis:* Wie kann man aus der neuen zweiten Gleichung wieder die alte zweite Gleichung herstellen?

- (e) Erklären Sie nun in eigenen Worten:

*Warum kann das Gauß-Verfahren als mehr als nur einen Rechenalgorithmus auffassen?*

### Aufgabe 3

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcrcl}x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ -x & + & y & - & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 1\end{array}$$

- (a) Lösen Sie das Gleichungssystem mit einem systematischen Eliminationsverfahren.
- (b) Führen Sie anschließend eine Probe durch.
- (c) Wie lässt sich jede der drei Gleichungen geometrisch im  $\mathbb{R}^3$  interpretieren?
- (d) Wie lässt sich entsprechend die Lösung des gesamten Gleichungssystems geometrisch interpretieren?

**Aufgabe 4**

Ermitteln Sie alle Lösungen des folgende linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}$$

- (a) Führen Sie ein geeignetes Eliminationsverfahren durch.
- (b) An welcher Stelle erkennt man, dass eine Variable frei gewählt werden kann?
- (c) Beschreiben Sie die gesamte Lösungsmenge mithilfe eines Parameters  $t \in \mathbb{R}$ .
- (d) Interpretieren Sie die beiden Gleichungen im  $\mathbb{R}^3$  und beschreiben Sie die Gestalt der Lösungsmenge geometrisch.

**Aufgabe 5**

Für  $a \in \mathbb{R}$  betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} x + 2y = 3, \\ 2x + 4y = a. \end{array}$$

- (a) Lösen Sie das System zunächst für  $a = 6$ .
- (b) Untersuchen Sie anschließend den Fall  $a = 5$ .
- (c) Bestimmen Sie nun für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$ , wann das Gleichungssystem *genau eine Lösung*, *unendlich viele Lösungen* oder *keine Lösung* besitzt.
- (d) Deuten Sie Ihr Ergebnis geometrisch.
- (e) Warum kann in diesem Beispiel der Fall „genau eine Lösung“ für keinen Wert von  $a$  auftreten?

**Aufgabe 6**

Gegeben sei die Menge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Bestimmen Sie die zu  $t = 0$ ,  $t = 1$  und  $t = -1$  gehörenden Punkte.
- (b) Beschreiben Sie geometrisch, was die Menge  $L$  darstellt.
- (c) Finden Sie zwei lineare Gleichungen in den Variablen  $x, y, z$ , die von jedem Punkt aus  $L$  erfüllt werden.  
*Hinweis:* Setzen Sie  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 3t$  und versuchen Sie, den Parameter  $t$  zu eliminieren.
- (d) Überprüfen Sie umgekehrt, ob jede Lösung des von Ihnen gefundenen Gleichungssystems in  $L$  liegt.

**Aufgabe 7**

Für die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \\ 2x + 2y &= 4\end{aligned}$$

findet sich in der Klausur folgende Rechnung:

$$\begin{array}{ccccc}x + y = 2, & & x + y = 2, & & \\ 2x + 2y = 4 & \implies & 0 = 0 & \implies & x = y = 0.\end{array}$$

- Bis zu welchem Schritt ist die Rechnung korrekt?
- Was bedeutet die Gleichung  $0 = 0$  tatsächlich?
- Bestimmen Sie die vollständige Lösungsmenge.
- Geben Sie diese mithilfe eines Parameters an.
- Wie sieht die entsprechende geometrische Situation aus?

Betrachten Sie nun das ähnliche System

$$\begin{aligned}x + y &= 2, \\ 2x + 2y &= 5.\end{aligned}$$

Welche Gleichung der Form  $0 = c$  entsteht beim Eliminieren? Und was sagt sie über die Lösungsmenge aus?

**Zusatzaufgabe (Lösungen zwischen Lösungen)**

Betrachten Sie zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2.\end{aligned}$$

Angenommen,  $P = (x_1, y_1)$  und  $Q = (x_2, y_2)$  seien zwei verschiedene Lösungen dieses Systems. Wir wollen zeigen, dass daraus bereits unendlich viele Lösungen folgen.

- Was bedeutet die Aussage, dass  $P$  eine Lösung ist? Schreiben Sie die entsprechenden beiden Gleichungen auf.
- Schreiben Sie dasselbe für  $Q$  auf.
- Für  $t \in \mathbb{R}$  und definieren wir den Punkt  $R_t := (1 - t)P + tQ$ .  
Schreiben Sie die beiden Koordinaten von  $R_t$  explizit auf.
- Zeigen Sie, dass  $R_t$  die erste Gleichung des Systems erfüllt.  
Verwenden Sie dabei, dass sowohl  $P$  als auch  $Q$  Lösungen sind.
- Zeigen Sie entsprechend, dass  $R_t$  auch die zweite Gleichung erfüllt.
- Damit ist für jedes  $t \in \mathbb{R}$  auch  $R_t$  eine Lösung. Welche geometrische Bedeutung hat die Menge  $\{R_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ ?
- Begründen Sie damit: *Ein lineares Gleichungssystem in zwei Variablen kann nicht genau zwei verschiedene Lösungen besitzen.*
- Vergleichen Sie diese Aussage mit den drei Fällen aus Aufgabe 1.