

# Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

## 4. Übung am 29. September 2026

**Thema: Vektorrechnung und analytische Geometrie**

**Vorbereitungsaufgaben: 1, 4**

**Schwerpunktaufgaben: 5, 6, 7**

In dieser Übung beschäftigen wir uns mit Vektoren und ihrer geometrischen Bedeutung sowie mit Geraden und Ebenen im  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$ .

Dabei sollen rechnerische und geometrische Sichtweisen möglichst eng miteinander verbunden werden. Insbesondere wollen wir verstehen, wie

- Länge, Winkel und Orthogonalität durch Vektoren beschrieben werden,
- Geraden und Ebenen durch Gleichungen bzw. Parameterdarstellungen beschrieben werden,
- und geometrische Lagebeziehungen auf Gleichungssysteme zurückgeführt werden können.

### Passende Literatur:

- Kapitel 14 zum Thema Vektorrechnung im Lehrbuch  
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Abschnitt 7.7 zum Thema Vektorrechnung im Lehrbuch  
Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

### Aufgabe 1

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Zeichnen Sie die zugehörigen Ortsvektoren in einem Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $3\vec{a}$  und  $-2\vec{a} + 3\vec{b}$ , und zwar jeweils einmal zeichnerisch und einmal rechnerisch.
- Berechnen Sie die Beträge der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- Berechnen Sie das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  sowie den Winkel, den die beiden Vektoren einschließen.

Betrachten Sie anschließend die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $3\vec{a}$  und  $-2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

- (b) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- (c) Berechnen Sie das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ . Entscheiden Sie anhand des Ergebnisses (ohne weitere Rechnung), ob die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  einen spitzen, einen rechten oder einen stumpfen Winkel einschließen.

### Aufgabe 2

Gegeben seien die Punkte  $A = (-2, 0)$ ,  $B = (4, 4)$  und  $C = (2, 7)$  in der Ebene.

- (a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks  $ABC$ .
- (b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck  $ABC$  bei  $B$  einen rechten Winkel besitzt.
- (c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .
- (d) Ermitteln Sie den Punkt  $D$  derart, dass das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm ist.

### Aufgabe 3

Für Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  ist das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)  $\vec{a} \times \vec{b}$  zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  erklärt. Anders als beim Skalarprodukt ist das Ergebnis ein Vektor, keine Zahl.

- (a) Welche geometrische Bedeutung haben das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  und dessen Betrag  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ?
- (b) Berechnen Sie das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten:  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 1, 1)$  und  $C = (2, 2, 3)$ ,
- (d) Wiederholen Sie die Rechnung für  $A = (-1, 1, 2)$ ,  $B = (1, 2, 3)$ ,  $C = (-2, 1, 1)$ .

Warum muss beim Übergang vom Betrag des Vektorproduktes zum Flächeninhalt eines Dreiecks noch durch 2 geteilt werden?

### Aufgabe 4

Eine Gerade im  $\mathbb{R}^2$  (d.h. in der zweidimensionalen Ebene) kann durch eine Parameterdarstellung, aber auch durch eine parameterfreie Gleichung beschrieben werden.

Es sei  $g$  die Gerade, die durch die beiden Punkte  $A = (0, 2)$  und  $B = (1, 4)$  verläuft.

- (a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung von  $g$ .
- (b) Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung von  $g$  in der Form  $y = mx + n$ .
- (c) Welche der folgenden Punkte liegen auf der Geraden  $g$ ? Berechnen Sie für diejenigen Punkte, die nicht auf  $g$  liegen, den Abstand zu  $g$ .

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (-1, 1) \quad P_3 = (4, 10)$$

- (d) Es sei  $h_1$  die Gerade, die  $g$  im Punkt  $B$  im rechten Winkel schneidet. Ermitteln Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung von  $h_1$ .

- (e) Es sei  $h_2$  die Gerade, die parallel zu  $g$  und durch den Punkt  $P = (2, 0)$  verläuft. Ermitteln Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung von  $h_2$ .

Vergleichen Sie die verschiedenen Darstellungen einer Geraden:  $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$  und  $y = mx + n$ .

Welche geometrischen Informationen kann man aus der jeweiligen Darstellung besonders leicht ablesen?

### Aufgabe 5

Im  $\mathbb{R}^3$  (d.h. im dreidimensionalen Raum) lässt sich eine Gerade immer noch durch eine Parameterdarstellung beschreiben, aber nicht mehr durch eine einzelne parameterfreie Gleichung.

Es sei  $g$  die Gerade, die durch die beiden Punkte  $A = (1, -2, 0)$  und  $B = (2, -1, 1)$  verläuft.

- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von  $g$ .
- Untersuchen Sie für jeden der beiden Punkte  $P_1 = (3, 4, -5)$  und  $P_2 = (4, 1, 3)$ , ob er auf der Geraden  $g$  liegt.
- Warum kann eine Gerade im  $\mathbb{R}^3$  im Allgemeinen nicht durch eine einzige lineare Gleichung  $ax + by + cz = d$  geschrieben werden? Welche geometrische Menge beschreibt eine solche Gleichung stattdessen?

Untersuchen Sie nun die Lage der beiden Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Schneiden sich  $g$  und  $h$ ? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.
- Falls sich zwei Geraden im  $\mathbb{R}^3$  nicht schneiden: Welche zwei grundsätzlich verschiedenen geometrischen Situationen können auftreten?
- Wie erkennt man rechnerisch den Unterschied zwischen *parallel* und *windschief*?

### Aufgabe 6

Eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  kann durch eine Gleichung  $ax + by + cz = d$  beschrieben werden.

- (a) Welche geometrische Bedeutung besitzt der Vektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}?$$

Es sei nun die Ebene  $E : x + 2y - 3z = 1$  gegeben.

- Welche der Punkte  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, 2, 1)$  und  $P_3 = (2, 2, 1)$  liegen auf  $E$ ?
- Berechnen Sie für die übrigen Punkte den Abstand zur Ebene.
- Gegeben sei die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von  $g$  mit  $E$ .

- (e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, welche die Ebene  $E$  im Punkt  $P = (4, 3, 3)$  im rechten Winkel schneidet.
- (f) Warum ist in Teil (e) der Normalenvektor der Ebene gerade ein geeigneter Richtungsvektor der gesuchten Geraden?

### Aufgabe 7

Es sei  $E$  die Ebene durch die drei Punkte

$$A = (2, 0, 1), \quad B = (3, 2, 0), \quad C = (1, -2, 4).$$

- (a) Bestimmen Sie zwei Richtungsvektoren der Ebene.
- (b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von  $E$ .
- (c) Bestimmen Sie mithilfe eines Vektorproduktes einen Normalenvektor der Ebene.
- (d) Bestimmen Sie daraus eine parameterfreie Gleichung von  $E$ .
- (e) Überprüfen Sie, dass alle drei gegebenen Punkte tatsächlich die von Ihnen gefundene Gleichung erfüllen.
- (f) Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene, die zu  $E$  parallel ist und durch den Punkt  $P = (2, 1, 2)$  verläuft.

Welche Größen bleiben beim Übergang zu einer parallelen Ebene gleich, und welche müssen verändert werden?

### Zusatzaufgabe (Geometrie des Gauß-Verfahrens)

Auf Blatt 3 haben wir lineare Gleichungssysteme mithilfe elementarer Umformungen gelöst. Dabei wurden insbesondere die folgenden Operationen verwendet:

1. Vertauschen zweier Gleichungen,
2. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ ,
3. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Wir wollen nun untersuchen, was diese Operationen geometrisch bedeuten.

- (a) Betrachten Sie im  $\mathbb{R}^2$  die Gleichung  $2x + y = 4$  und zeichnen Sie die zugehörige Gerade. Zeichnen Sie anschließend auch die durch  $4x + 2y = 8$  und  $-2x - y = -4$  beschriebenen Mengen. Was fällt auf? Welche geometrische Bedeutung hat also die Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ ?
- (b) Betrachten Sie nun das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y &= 3, \\ 2x - y &= 0. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie die beiden Geraden und bestimmen Sie ihren Schnittpunkt.

Ersetzen Sie nun die zweite Gleichung durch die Summe aus der zweiten und der ersten Gleichung:  $(2x - y) + (x + y) = 0 + 3$ .

Welche neue Gleichung entsteht?

Zeichnen Sie auch diese Gerade.

Was ist mit der ursprünglichen zweiten Geraden geschehen? Was ist mit dem Schnittpunkt geschehen?

- (c) Wiederholen Sie Teil (b), indem Sie zur zweiten Gleichung jeweils das  $\lambda$ -fache der ersten Gleichung addieren:  $(2x - y) + \lambda(x + y) = 3\lambda$ .

Untersuchen Sie beispielsweise  $\lambda = -2, -1, 1, 2$ .

Welche Eigenschaft besitzen alle entstehenden Geraden?

- (d) Begründen Sie nun allgemein: Sind  $a_1x + b_1y = c_1$  und  $a_2x + b_2y = c_2$  zwei Geradengleichungen mit einem gemeinsamen Punkt  $P$ , dann verläuft für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch die Gerade  $(a_2 + \lambda a_1)x + (b_2 + \lambda b_1)y = c_2 + \lambda c_1$  durch  $P$ .

- (e) Gehen wir nun in den  $\mathbb{R}^3$ . Betrachten Sie die Ebenen

$$E_1 : x + y + z = 1 \text{ und } E_2 : x - y + z = 0.$$

Bestimmen Sie zunächst ihre Schnittgerade.

- (f) Wir behalten  $E_1$  und ersetzen  $E_2$  nacheinander durch  $E_2 + E_1$  und  $E_2 - 2E_1$ , wobei die Summen elementweise zu verstehen sind.

Bestimmen Sie die entsprechenden neuen Ebenengleichungen.

Zeigen Sie, dass die zuvor bestimmte Schnittgerade auch in jeder dieser neuen Ebenen liegt.

- (g) Beschreiben Sie die geometrische Situation:

Was verändert sich bei der Umformung  $E_2 \mapsto E_2 + \lambda E_1$ , und was bleibt unverändert?

- (h) Formulieren Sie abschließend in eigenen Worten: *Was macht das Gauß-Verfahren geometrisch?*

### Zusatzaufgabe (Parallelogrammgesetz)

Seien  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ .

Wir wollen die Identität  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 + \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 2\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{b}\|^2$  beweisen.

- (a) Erinnern Sie sich daran, dass  $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$ .

Schreiben Sie damit  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2$  als Skalarprodukt.

- (b) Multiplizieren Sie aus und zeigen Sie:  $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$ .

- (c) Zeigen Sie entsprechend:  $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$ .

- (d) Addieren Sie beide Gleichungen und folgern Sie das Parallelogrammgesetz.

- (e) Zeichnen Sie für zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$  das von ihnen aufgespannte Parallelogramm.

Welche Strecken werden durch  $\vec{a} + \vec{b}$  und  $\vec{a} - \vec{b}$  beschrieben?

- (f) Formulieren Sie das Parallelogrammgesetz nun ausschließlich als geometrische Aussage über Seitenlängen und Diagonalen eines Parallelogramms.