

Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

5. Übung am 30. September 2026

Thema: Reelle Funktionen

Vorbereitungsaufgaben: 1, 2, 3

Schwerpunktaufgaben: 4, 5, 7, 9, 10

In dieser Übung beschäftigen wir uns mit Funktionen und ihren grundlegenden Eigenschaften. Dabei wollen wir insbesondere zwischen einer Funktionsvorschrift und einer Funktion unterscheiden: Zu einer Funktion gehören nicht nur eine Vorschrift, sondern auch Definitions- und Zielmenge. Neben der graphischen Betrachtung von Funktionen werden wir uns mit den Begriffen *injektiv*, *surjektiv* und *bijektiv* beschäftigen und untersuchen, wie diese mit Monotonie und Umkehrbarkeit zusammenhängen.

Passende Literatur:

- Kapitel 3 zum Thema Funktionen im Lehrbuch
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 2. Binomi, Barsinghausen, 2012.
- Kapitel 5 sowie Abschnitte 10.1 und 10.2 im Lehrbuch
Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 5.1, 5.2.1–5.2.3, 5.3 sowie 8.3 im Lehrbuch
Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

Aufgabe 1

Entscheiden Sie bei den folgenden Zuordnungen, ob dadurch eine Funktion definiert wird. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- (a) Jedem $x \in [-3, 3]$ werden alle $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, für die $x^2 + y^2 = 9$ gilt.
- (b) Jedem $x \in [-3, 3]$ werden alle $y \geq 0$ zugeordnet, für die $x^2 + y^2 = 9$ gilt.
- (c) Jedem $x \in [-3, 3]$ wird $y = -\sqrt{9 - x^2}$ zugeordnet.

Skizzieren Sie jeweils die Menge aller zugehörigen Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Formulieren Sie anschließend in eigenen Worten, welche Eigenschaft eine Zuordnung besitzen muss, damit sie eine Funktion ist.

Aufgabe 2

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

Beschreiben Sie jeweils, wie der Graph der neuen Funktion aus dem Graphen von f entsteht.

$$\begin{array}{lllll} g_1(x) = f(x) + 1, & g_2(x) = 3f(x), & g_3(x) = \frac{1}{3}f(x), & g_4(x) = f(x - 1), & g_5(x) = f(x + 1), \\ g_6(x) = f(2x), & g_7(x) = f\left(\frac{x}{2}\right), & g_8(x) = -f(x), & g_9(x) = f(-x), & g_{10}(x) = |f(x)| \end{array}$$

Achten Sie insbesondere auf den Unterschied zwischen Veränderungen *innerhalb* und *außerhalb* des Funktionsarguments.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und den Bildbereich der folgenden Funktionen.

Skizzieren Sie außerdem qualitativ den jeweiligen Funktionsgraphen.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{1}{x} & f(x) = \frac{1}{x-1} & f(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = (\sqrt{2x-1}) - 3 & f(x) = \ln(2x-3) & f(x) = \ln|x+1|. \end{array}$$

Erklären Sie jeweils, welche Bedingung an x den Definitionsbereich einschränkt.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungsvorschriften auf *Wohldefiniertheit*, *Injektivität*, *Surjektivität* und, soweit sinnvoll, *Monotonie*.

$$\begin{array}{llll} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} & g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} & h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 & x \mapsto x^2+1 & x \mapsto x^3 & j(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0, \\ -2x, & x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Achten Sie darauf, in welcher Reihenfolge die Fragen sinnvoll untersucht werden sollten.

Insbesondere: Kann eine Vorschrift injektiv oder surjektiv sein, wenn sie gar keine Abbildung zwischen den angegebenen Mengen definiert?

Aufgabe 5

Betrachten Sie die Abbildungsvorschrift $f_i(x) = x^2$ mit den folgenden Definitions- und Zielbereichen:

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ und } f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

- Welche der Funktionen sind injektiv?
- Welche sind surjektiv?
- Welche sind bijektiv?
- Vergleichen Sie Ihre Antworten.

Warum ist die „Aussage“ *Die Funktion $x \mapsto x^2$ ist nicht bijektiv.* ohne weitere Angaben unvollständig?

Aufgabe 6

- Zeigen Sie:

Jede streng monoton wachsende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv.

- Formulieren und beweisen Sie die entsprechende Aussage für streng monoton fallende Funktionen.
- Gilt auch die Umkehrung?

Ist also jede injektive Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton?

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Achten Sie in Teil (a) darauf, die Definition der Injektivität tatsächlich zu verwenden.

Aufgabe 7

Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ Funktionen zwischen nichtleeren Mengen. Wir wollen untersuchen, welche Eigenschaften von f und g sich auf die Verkettung $g \circ f: A \rightarrow C$ übertragen.

Verwenden Sie zunächst kleine endliche Mengen und konstruieren Sie selbst geeignete Beispiele oder Gegenbeispiele.

- (a) Konstruieren Sie Funktionen f und g , sodass f injektiv und g nicht injektiv, aber $g \circ f$ nicht injektiv ist.
- (b) Konstruieren Sie Funktionen f und g , sodass f injektiv und g nicht injektiv ist.
Kann $g \circ f$ trotzdem injektiv sein?
- (c) Vergleichen Sie die Situationen aus (a) und (b).
Welche Teile von B sind für die Injektivität von $g \circ f$ überhaupt relevant?
- (d) Versuchen Sie, Funktionen f und g zu konstruieren, sodass f nicht injektiv, aber $g \circ f$ injektiv ist.
Gelingt dies?
Formulieren Sie aus Ihrer Beobachtung eine allgemeine Vermutung.
- (e) Versuchen Sie nun, Funktionen f und g zu konstruieren, sodass g nicht surjektiv, aber $g \circ f$ surjektiv ist.
Gelingt dies?
Formulieren Sie wiederum eine allgemeine Vermutung.
- (f) Konstruieren Sie Funktionen f und g , sodass f nicht surjektiv und g surjektiv ist.
Kann $g \circ f$ trotzdem surjektiv sein?
- (g) Finden Sie auch eine Situation, in der f nicht surjektiv und g surjektiv ist, aber $g \circ f$ nicht surjektiv ist.
- (h) Welche Teile von B sind für die Surjektivität von $g \circ f$ tatsächlich relevant?

Versuchen Sie bei den Beweisen möglichst direkt mit den Definitionen von Injektivität und Surjektivität zu arbeiten.

Bei den falschen Aussagen kann es hilfreich sein, zunächst sehr kleine endliche Mengen zu betrachten.

Aufgabe 8

Gegeben sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$.

- (a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.
- (b) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (c) Überprüfen Sie: $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (d) Überprüfen Sie außerdem: $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$.
- (e) Zeichnen Sie die Graphen von f und f^{-1} in dasselbe Koordinatensystem.
Welche geometrische Beziehung besitzen die beiden Graphen?

Aufgabe 9

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.

Beweisen Sie wahre Aussagen und geben Sie für falsche Aussagen nach Möglichkeit ein Gegenbeispiel an.

- (a) Der größtmögliche Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ist $\mathbb{R}$.
- (b) Der größtmögliche Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist $\mathbb{R}$.
- (c) Eine Funktion $f(x) = a b^x$ mit $a \neq 0$ und $b > 1$ ist stets monoton wachsend.
- (d) Es gibt keine reelle Funktion, die gleichzeitig gerade und ungerade ist.
- (e) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig, so besitzt f mindestens eine Nullstelle.
- (f) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, so ist f umkehrbar.
- (g) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar, so ist f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.
- (h) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade, so ist f nicht umkehrbar.

Aufgabe 10

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 1$.

Bestimmen Sie jeweils $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, entscheiden Sie, ob $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existiert, und untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = 1$ stetig ist.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x < 1, \\ -x^2 + 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 2, & x < 1, \\ 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \geq 1. \end{cases}$$

$$(c) \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & x < 1, \\ -1, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Welche Informationen benötigt man zusätzlich zu den beiden einseitigen Grenzwerten, um Stetigkeit an der Stelle $x = 1$ festzustellen?

Zusatzaufgabe (Existenz einer Umkehrfunktion?)

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Wir wollen zeigen: f ist bijektiv $\iff$ es existiert eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$.

Dabei bezeichnet $\text{id}_X(x) = x$ die Identitätsabbildung auf X .

- (a) Nehmen Sie zunächst an, es existiere eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$.

Zeigen Sie, dass f injektiv sein muss.

Hinweis: Starten Sie mit $f(x_1) = f(x_2)$ und wenden Sie g auf beide Seiten an.

- (b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, $f \circ g = \text{id}_Y$.

Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

Hinweis: Sei $y \in Y$ beliebig. Welches Element aus X könnte ein Urbild von y sein?

- (c) Folgern Sie daraus, dass f bijektiv ist.
- (d) Nehmen Sie nun umgekehrt an, f sei bijektiv.
Begründen Sie, warum es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
- (e) Definieren Sie mithilfe dieser Beobachtung eine Abbildung $f^{-1}: Y \rightarrow X$.
- (f) Zeigen Sie: $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$.
- (g) Erklären Sie abschließend in eigenen Worten, warum sowohl Injektivität als auch Surjektivität nötig sind, damit eine Umkehrfunktion existieren kann.

Zusatzaufgabe (Implikation oder Äquivalenz?)

Seien wieder $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$.

Untersuchen Sie die folgenden Aussagen.

Gehen Sie bei jeder Aussage nach demselben Schema vor:

1. Entscheiden Sie zunächst anhand selbst gewählter Beispiele, ob die Aussage plausibel ist.
2. Versuchen Sie, ein Gegenbeispiel zu konstruieren.
3. Falls kein Gegenbeispiel existiert, beweisen Sie die Aussage.
4. Formulieren Sie die Umkehrung der Aussage.
5. Entscheiden Sie, ob auch die Umkehrung gilt.
6. Entscheiden Sie abschließend, ob eine Äquivalenz vorliegt.

Untersuchen Sie:

- (a) f injektiv $\wedge g$ injektiv $\implies g \circ f$ injektiv.
- (b) $g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv.
- (c) $g \circ f$ injektiv $\implies g$ injektiv.
- (d) f surjektiv $\wedge g$ surjektiv $\implies g \circ f$ surjektiv.
- (e) $g \circ f$ surjektiv $\implies g$ surjektiv.
- (f) $g \circ f$ surjektiv $\implies f$ surjektiv.

Formulieren Sie für jede wahre Implikation zusätzlich die Kontraposition.

Vergleichen Sie Ihre Vorgehensweise mit den Begriffen *Implikation*, *Umkehrung*, *Äquivalenz* und *Kontraposition* aus Blatt 1.

Zusatzaufgabe (Links- und Rechtsinverse)

Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow A$.

- (a) Angenommen, $g \circ f = \text{id}_A$.

Welche Eigenschaft von f lässt sich daraus vermuten?

Welche Eigenschaft von g ?

Versuchen Sie zunächst, dies an selbst gewählten Beispielen zu untersuchen.

- (b) Beweisen Sie anschließend Ihre Vermutung.
- (c) Angenommen nun, $f \circ g = \text{id}_B$.
Welche Eigenschaften von f bzw. g folgen diesmal?
Beweisen Sie Ihre Aussagen.
- (d) Vergleichen Sie: $g \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ g = \text{id}_B$.
Warum sind diese Bedingungen zunächst nicht äquivalent?
- (e) Was folgt, wenn beide Gleichungen gleichzeitig gelten?
Stellen Sie einen Zusammenhang zur Bijektivität und zur Umkehrfunktion her.