

Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

6. Übung am 01. Oktober 2026

Thema: Differential- und Integralrechnung

Vorbereitungsaufgaben: 1 (a bis e), 2, 6

Schwerpunktaufgaben: 1 (f bis h), 3, 4, 5, 7, 8

In dieser Übung beschäftigen wir uns mit grundlegenden Ideen der Differential- und Integralrechnung. Dabei soll insbesondere deutlich werden, dass Ableitungen und Integrale nicht nur Rechenoperationen sind, sondern geometrische und inhaltliche Bedeutungen besitzen.

Passende Literatur:

- Kapitel 4 und 5 im Lehrbuch
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 2. Binomi, Barsinghausen, 2012.
- Abschnitte 10.3, 10.4, 11.1 und 11.2 im Lehrbuch
Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 8.4.1 bis 8.4.11 sowie Abschnitte 8.5.1 bis 8.5.7 im Lehrbuch
Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

Aufgabe 1

Für eine Funktion f und zwei verschiedene Stellen x und $x + h$ beschreibt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

die Steigung der Sekante durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ des Funktionsgraphen.

- Welche geometrische Bedeutung hat der Zähler $f(x+h) - f(x)$?
- Welche geometrische Bedeutung hat h ?
- Was geschieht geometrisch mit der Sekante, wenn h gegen 0 geht?
- Betrachten Sie nun $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- Vereinfachen Sie den erhaltenen Ausdruck für $h \neq 0$.
Welche Termumformung aus Blatt 2 wird dabei verwendet?
- Die Ableitung von f an der Stelle x ist definiert durch

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

sofern dieser Grenzwert existiert. Bestimmen Sie damit $f'(x)$ von $f(x) = x^2$.

- (g) Warum darf man im ursprünglichen Differenzenquotienten nicht einfach $h = 0$ einsetzen?
Warum ist der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ nach der Umformung trotzdem möglich?
- (h) Wiederholen Sie das Vorgehen für $f(x) = x^3$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.
Geben Sie jeweils an, welche Ableitungsregeln Sie verwenden.

- (a) $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 20x - 17$
- (b) $f(x) = 2xe^x$
- (c) $f(x) = \frac{x-2}{x^3-2}$
- (d) $f(x) = \sin(3x - 6)$
- (e) $f(x) = e^{\sin(x)}$.

Unterscheiden Sie insbesondere zwischen Summenregel, Regel für konstante Faktoren, Produktregel, Kettenregel und, falls bereits bekannt, Quotientenregel.

Aufgabe 3

Gegeben sei zunächst die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 4$.
- (b) Erklären Sie geometrisch, welche Bedeutung $f'(4)$ besitzt.
- (c) Bestimmen Sie diejenige Tangente an den Graphen von f , die durch den Punkt $P = (-1, 0)$ verläuft.

Skizzieren Sie nun selbst eine differenzierbare Funktion g , die zwei lokale Extremstellen und mindestens eine Wendestelle besitzt.

- (d) Skizzieren Sie anschließend qualitativ den Graphen von g' .
- (e) Skizzieren Sie qualitativ den Graphen von g'' .
- (f) Markieren Sie alle Stellen, an denen $g'(x) = 0$.
- (g) Welche dieser Stellen sind lokale Extremstellen?
- (h) Welche Informationen liefert das Vorzeichen von g' ?
- (i) Welche Informationen liefert das Vorzeichen von g'' ?

Aufgabe 4

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Untersuchen Sie die folgenden Aussagen und entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Formulieren Sie außerdem die Umkehrung und entscheiden Sie, ob diese gilt.

Falls eine Aussage falsch ist, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

- (a) Ist x_0 eine lokale Extremstelle von f , so gilt $f'(x_0) = 0$.
- (b) Aus $f'(x_0) = 0$ folgt, dass x_0 eine lokale Extremstelle von f ist.
- (c) Aus $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ folgt, dass x_0 eine lokale Minimalstelle von f ist.
- (d) Ist x_0 eine lokale Minimalstelle von f , so gilt $f''(x_0) > 0$.
- (e) Aus $f''(x_0) = 0$ folgt, dass x_0 eine Wendestelle von f ist.

Ordnen Sie die auftretenden Bedingungen anschließend als *notwendig*, *hinreichend* oder *notwendig und hinreichend* ein.

Vergleichen Sie Ihre Argumentation mit den Begriffen aus Blatt 1.

Aufgabe 5

Ein Baugrundstück hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlängen 80 m und 100 m. In dieses Grundstück soll eine rechteckige Halle mit Seitenlängen a und b eingeschrieben werden.

- (a) Formulieren Sie eine geometrische Nebenbedingung zwischen a und b .
- (b) Stellen Sie die Fläche $A = a \cdot b$ als Funktion nur einer Variablen dar.
- (c) Bestimmen Sie die maximal mögliche Fläche.
- (d) Bestimmen Sie die dazugehörigen Seitenlängen.
- (e) Welche Rolle spielen bei der Lösung die Bedingungen $A'(x) = 0$ und $A''(x)$?
- (f) Welche Teile Ihrer Lösung beruhen auf Analysis und welche auf der geometrischen Modellierung des Problems?

Aufgabe 6

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion.

- (a) $f(x) = \frac{1}{x+3}$
- (b) $f(x) = \sin(4x - 3)$
- (c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}x - 1\right)^3$
- (d) $f(x) = e^{3x}$.

Welche Gemeinsamkeit besitzen die inneren Funktionen in diesen Beispielen?

Aufgabe 7

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int_0^2 (2 - x^2) dx$

(b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{(x+2)^2} dx.$

Untersuchen Sie jeweils, ob der berechnete Integralwert dem geometrischen Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x -Achse entspricht.

Aufgabe 8

Finden Sie eine Funktion f , für die $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$ gilt.

- (a) Zeichnen Sie den Graphen Ihrer Funktion.
- (b) Finden Sie eine zweite, von der ersten verschiedene Funktion mit derselben Eigenschaft.
- (c) Finden Sie eine dritte Funktion, die im Intervall $[-1, 5]$ ihr Vorzeichen wechselt und trotzdem $\int_{-1}^5 f(x) dx = -3$ erfüllt.
- (d) Was zeigt diese Aufgabe darüber, wie viel Information der Wert eines bestimmten Integrals über eine Funktion enthält?
- (e) Können zwei sehr unterschiedlich aussehende Funktionen denselben Integralwert besitzen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Zusatzaufgabe (Herleitung der Produktregel)

Seien f und g differenzierbare Funktionen. Wir möchten verstehen, weshalb $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ gilt.

Beginnen Sie mit dem Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

- (a) Addieren und subtrahieren Sie im Zähler den Term $f(x+h)g(x)$.
- (b) Gruppieren Sie die entstehenden Terme so, dass zwei Differenzenquotienten auftreten.
- (c) Formen Sie den Ausdruck in die Gestalt

$$f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

um.

- (d) Betrachten Sie den Grenzübergang $h \rightarrow 0$. Welche Grenzwerte treten auf?
- (e) Leiten Sie daraus die Produktregel her.

Welche Rolle spielt bei diesem Beweis die Tatsache, dass differenzierbare Funktionen stetig sind?

Zusatzaufgabe (Kurvendiskussion)

Gegeben sei $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Bestimmen Sie

- (a) alle Nullstellen,
- (b) die lokalen Extrempunkte einschließlich ihrer Art,
- (c) die Wendepunkte,
- (d) das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$,
- (e) die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$.

Skizzieren Sie anschließend den Graphen mithilfe Ihrer Ergebnisse.

Zusatzaufgabe (Stammfunktionen)

- (a) Was bedeutet es, dass F eine Stammfunktion von f ist?
- (b) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der Funktionen $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$ für $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = 3e^x - \frac{2}{x}$ für $x > 0$.
- (c) Sei F eine Stammfunktion von f .
Zeigen Sie, dass für jedes $C \in \mathbb{R}$ auch $F_C(x) := F(x) + C$ eine Stammfunktion von f ist.
- (d) Warum unterscheiden sich zwei Stammfunktionen derselben Funktion nur um eine Konstante?

Zusatzaufgabe (Integral und Flächeninhalt)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

- (a) Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist stets positiv.
- (b) Das bestimmte Integral kann einen negativen Wert besitzen.
- (c) Das bestimmte Integral entspricht stets dem geometrischen Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f , der x -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$.
- (d) Der Betrag $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$ entspricht stets diesem geometrischen Flächeninhalt.

Formulieren Sie anschließend möglichst präzise den Unterschied zwischen dem bestimmten Integral als *orientiertem Flächeninhalt* und dem geometrischen Flächeninhalt.

Diskutieren Sie insbesondere den Unterschied zwischen $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$ und $\int_a^b |f(x)| dx$.