

Brückenkurs Mathe und Physik spezial

Ayan Amalie Osman Mohamed

7. Übung am 02. Oktober 2026

Thema: Komplexe Zahlen und elementare Zahlentheorie

Vorbereitungsaufgaben: 1, 2, 6

Schwerpunktaufgaben: 3, 4, 7

In dieser letzten Übung beschäftigen wir uns zunächst mit den komplexen Zahlen.

Dabei werden viele bekannte Ideen wieder auftauchen: Rechenoperationen, Gleichungen, Beträge, Punkte und Vektoren in der Ebene sowie verschiedene Darstellungen desselben mathematischen Objekts.

Im zweiten Teil verwenden wir elementare Aussagen über Teilbarkeit und Primzahlen, um verschiedene Beweismethoden aus den vergangenen Übungen noch einmal selbstständig anzuwenden.

Aufgabe 1

Wir betrachten komplexe Zahlen zunächst als geordnete Paare $z = (a, b)$ $a, b \in \mathbb{R}$, mit den Rechenoperationen $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ und $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.

Die Zahl $i := (0, 1)$ heißt imaginäre Einheit.

- (a) Zeigen Sie, dass jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ in der Form $z = a + bi$ geschrieben werden kann.
- (b) Berechnen Sie i^2 .
- (c) Welche Lösungen besitzt die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$?
- (d) Es seien $z = a + bi$, $w = c + di$. Multiplizieren Sie $(a + bi)(c + di)$ wie einen gewöhnlichen Klammerterm aus und verwenden Sie $i^2 = -1$.

Vergleichen Sie anschließend das Ergebnis mit der oben definierten Multiplikation geordneter Paare.

Aufgabe 2

Für $z = a + bi$ definieren wir die konjugiert komplexe Zahl durch $\bar{z} := a - bi$.

Zeigen Sie:

- (a) $\bar{\bar{z}} = z$,
- (b) $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$,
- (c) $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$,
- (d) $z\bar{z} = a^2 + b^2$,
- (e) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$,
- (f) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Welche der Aussagen lassen sich am schnellsten durch direktes Einsetzen zeigen?

Aufgabe 3

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

$$\frac{1}{1+i}, \quad \frac{2i}{3-i}, \quad \frac{-2+3i}{2+i}.$$

Erweitern Sie jeweils mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners.

- (a) Warum wird der Nenner dadurch reell?
- (b) Stellen Sie die auftretenden komplexen Zahlen als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene dar.
- (c) Welche geometrische Bedeutung besitzt die Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ in der Gaußschen Zahlenebene?

Aufgabe 4

Für $z = a + bi$ definieren wir den Betrag $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

- (a) Welche geometrische Bedeutung besitzt $|z|$?
- (b) Zeigen Sie: $|z|^2 = z\bar{z}$.
- (c) Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ habe Betrag r und Argument φ .
Begründen Sie die Darstellung $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
- (d) Leiten Sie umgekehrt aus $z = a + bi$ Formeln für r und φ her.
- (e) Seien $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $w = s(\cos \psi + i \sin \psi)$.
Multiplizieren Sie beide Zahlen und zeigen Sie: $|zw| = |z||w|$ und $\arg(zw) = \varphi + \psi \pmod{2\pi}$.
- (f) Interpretieren Sie Teil (e) geometrisch: Was bewirkt die Multiplikation komplexer Zahlen bezüglich Länge und Winkel?

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Fragen.

- (a) Welche der bekannten Rechenregeln für reelle Zahlen scheinen auch in $\mathbb{C}$ zu gelten?
- (b) Welche Gleichungen, die in $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzen, können in $\mathbb{C}$ lösbar werden?
- (c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathbb{C}$ und der Ebene $\mathbb{R}^2$?
- (d) Inwiefern kann man Addition komplexer Zahlen genauso interpretieren wie Addition von Vektoren aus Blatt 4?
- (e) Was unterscheidet die Multiplikation komplexer Zahlen von der komponentenweisen Multiplikation zweier Vektoren?

Aufgabe 6

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ bedeutet $a \mid b$ (sprich „a teilt b“), dass ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $b = ak$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen direkt aus der Definition:

- (a) $a \mid b \wedge b \mid c \implies a \mid c$.
- (b) $a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid (b + c)$.
- (c) $a \mid b \wedge c \mid d \implies ac \mid bd$.

Notieren Sie bei jedem Beweis ausdrücklich,

- welche Voraussetzung Sie verwenden,
- welche Existenzbehauptung aus der Definition folgt,
- und was genau am Ende gezeigt werden muss.

Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

Entscheiden Sie selbst, ob ein direkter Beweis, eine Kontraposition, ein Widerspruchsbeweis oder ein Gegenbeispiel besonders geeignet ist. Für die ganze Aufgaben seien $a, b \in \mathbb{Z}$.

- (a) Sind a und b gerade, so ist auch $a + b$ gerade.
- (b) Ist a^2 gerade, so ist a gerade.
- (c) Ist a^2 durch 3 teilbar, so ist a durch 3 teilbar.
- (d) Sind a und b ungerade, so ist ab ungerade.
- (e) Ist ab gerade, so sind a und b beide gerade.
- (f) Ist $a + b$ gerade, so sind a und b beide gerade.
- (g) Ist $a + b$ ungerade, so ist genau eine der beiden Zahlen a, b gerade.

Geben Sie bei jeder Aussage zunächst an, ob sie wahr oder falsch ist.

Falls sie falsch ist, genügt ein Gegenbeispiel.

Falls sie wahr ist, begründen Sie zusätzlich, warum die von Ihnen gewählte Beweismethode geeignet ist.

Aufgabe 8

Seien p eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}$.

Wir wollen zeigen: $p \mid ab \implies p \mid a \vee p \mid b$.

Dafür dürfen Sie verwenden: Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, so existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $ax + by = 1$.

- (a) Nehmen Sie an, $p \mid ab$ und $p \nmid a$.

Warum folgt aus der Primzahleigenschaft von p , dass p und a teilerfremd sind?

- (b) Folgern Sie, dass es $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $px + ay = 1$.
- (c) Multiplizieren Sie diese Gleichung mit b .
- (d) Welche beiden Terme der entstehenden Gleichung sind durch p teilbar?

- (e) Folgern Sie: $p \mid b$.
- (f) Welche Beweismethode wurde hier im Kern verwendet?
- (g) Formulieren Sie zusätzlich die Kontraposition des Satzes.

Aufgabe 9

Beweisen oder widerlegen Sie mit einer selbstgewählten Beweismethode. Wie in den vorherigen Aufgaben seien $p, a, b \in \mathbb{Z}$.

- (a) Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt einen Primteiler.
- (b) Ist $p > 2$ eine Primzahl, so ist p ungerade.
- (c) Ist p eine Primzahl und $p \mid a^2$, so gilt $p \mid a$.
- (d) Ist p eine Primzahl und $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, so teilt p mindestens einen der Faktoren.
- (e) Sind p und q verschiedene Primzahlen, so gilt $\text{ggT}(p, q) = 1$.

Versuchen Sie, bereits bewiesene Aussagen wiederzuverwenden, statt jeden Beweis vollständig von vorne zu beginnen.

Zusatzaufgabe (Unendlich viele Primzahlen)

Wir wollen zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Nehmen Sie zum Widerspruch an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Definieren Sie $N := p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

- (a) Warum gilt $N > 1$?
- (b) Warum besitzt N einen Primteiler?
- (c) Sei q ein Primteiler von N .
Warum müsste nach unserer Annahme $q \in \{p_1, \dots, p_n\}$ gelten?
- (d) Zeigen Sie, dass kein p_i die Zahl N teilen kann.
Hinweis: Welchen Rest lässt N bei Division durch p_i ?
- (e) Leiten Sie einen Widerspruch her.
- (f) Formulieren Sie abschließend präzise, welche Annahme widerlegt wurde.

Welche Rolle spielt in diesem Beweis die Konstruktion einer *neuen* Zahl?

Zusatzaufgabe (Primfaktorzerlegung)

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ existieren Primzahlen $p_1, \dots, p_k$ und positive Exponenten $e_1, \dots, e_k$ mit $n = \prod_{i=1}^k p_i^{e_i}$. Wählen Sie selbst eine geeignete Beweismethode.

- (a) Überlegen Sie zunächst, welche Beweismethode sich für eine Aussage der Form für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ besonders anbietet.
- (b) Was passiert, wenn n selbst prim ist?
- (c) Was passiert, wenn n nicht prim ist?

- (d) Wie können dann kleinere natürliche Zahlen auftreten, auf die sich eine bereits bekannte Aussage anwenden lässt?
- (e) Führen Sie den Beweis vollständig aus.