Satz IV.2: Die Koeffizienten a_k $(k \in \mathbb{Z})$ in der Laurent-Entwicklung von f um z_0 sind eindeutig bestimmt.

Bew.: Sei $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ mit gleichmäßiger Konvergenz und für jede kompakte Teilmenge von D_0 gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{m+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_K \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (\xi - z_0)^{k-m-1}\, d\xi$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta_{k-m} = a_m$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K(z_0)} (\xi - z_0)^n\, d\xi = \begin{cases} 1 & n=-1 \\ 0 & \text{sonst, da Stammfkt. existiert} \end{cases}$$

IV.2. Singularitäten

Def.: Die Funktion f sei in einer punktierten Umgebung des Punktes z $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < \rho\}$ holomorph, jedoch im Punkt z_0 selbst nicht erklärt. Der Punkt z_0 heißt dann <u>isolierte Singularität</u> von f.

Nach Satz IV. 1 läßt sich f in einer punktierten Umgebung dieses Punktes durch eine Laurent-Reihe um z_0 darstellen.

<u>Def</u>: Sei f holomorph in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ und sei

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

der Hauptteil der Laurententwicklung von f um z_0.

Man nennt den Punkt z_0

i) <u>hebbare Singularität</u>, falls $a_{-k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

ii) <u>Pol der Ordnung m</u> $(m \in \mathbb{N})$, falls

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}, \qquad a_{-m} \neq 0$$

iii) <u>wesentliche Singularität</u>, falls $f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$ mit unendlich vielen von Null verschiedenen Koeffizienten a_{-k}.

<u>Bem</u>: • Für den Charakter eines singulären Punktes z_0 von f ist also der Hauptteil f_1 von f verantwortlich.

$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ heißt regulärer Teil von $f = f_1 + f_2$.

- Eine für $|z|>R$ holomorphe Funktion $f(z)$ hat im Punkt $z=\infty$ eine Nullstelle, bzw. einen Pol der Ordnung m, falls dies für die Funktion $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$ im Punkt $z=0$ zutrifft.
  Insbesondere heißt $f(z)$ holomorph im Punkt $z=\infty$, wenn $g(z)$ im Punkt $z=0$ holomorph ist.

Beispiele:

- $f(z)=\frac{\sin(z)}{z}$, f ist holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Die Laurent-Entwicklung um $z_0=0$ lautet

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}$$

d.h. $a_{-k}=0 \quad \forall k\in\mathbb{N} \Rightarrow z_0=0$ ist eine hebbare Singularität.

$$\Rightarrow \tilde{f}(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq 0 \\ 1 & z=0 \end{cases}$$ ist eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Fkt.

- $f(z)=\frac{z^2-2z+7}{z-2}=\frac{7}{z-2}+2+(z-2)$ ist holomorph für $z\neq 2$. Der Punkt $z_0=2$ ist eine Polstelle der Ordnung $m=1$ von f.

NR:

$$\frac{7}{z-2} + 2 + (z-2) = \frac{7}{z-2} + \frac{2(z-2)}{z-2} + \frac{(z-2)^2}{z-2}$$

$$= \frac{7 + 2z - 4 + z^2 - 4z + 4}{z-2} = \frac{z^2 - 2z + 7}{z-2}$$

- $f(z) = e^{1/z}$ ist holomorph für $z=0$. Die Laurententwicklung von f um z_0 lautet

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

$\Rightarrow z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität.

Satz IV.3 Eine Funktion f besitze in z_0 eine isolierte Singularität. Ferner sei $|f|$ in dem punktierten Kreisgebiet $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < g\}$ beschränkt. Dann ist z_0 eine hebbare Singularität.

Bew: Sei $M > 0$ so, dass $|f(z)| < M$ für $0 < |z - z_0| < g$ gilt. Für $r < g$ folgt dann für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung von f um z_0 nach Satz IV.1

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

und damit

$$|a_k| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M}{r^k} \to 0 \text{ für } r \to 0$$

und $k = -1, -2, \dots$

also $a_k = 0$ für $k = -1, -2, \dots$ ■

Bemerkung: • Die Funktion f hat im Pkt z_0 einen Pol der Ordnung $m \Leftrightarrow g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ ist in z_0 holomorph und $g(z_0) \neq 0$.

• Der Punkt z_0 ist ein Pol der Ordnung m der Fkt. f $\Leftrightarrow h(z) = \frac{1}{f(z)}$ hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m.

Def.: Eine Funktion f heißt <u>meromorph</u>, in einem nicht notwendig beschränkten Gebiet D, wenn jeder Pkt. von D entweder Holomorphiepkt. von f oder Polstelle von f ist.

Beispiele: Die rationalen Funktionen

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad (P_n, Q_m \text{ Polynome } n < m)$$

sind in ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

Satz IV.4: Sei z_0 eine Polstelle der Funktion f. Dann gilt

$$|f(z)| \to \infty \text{ für } z \to z_0,$$

d.h. zu jedem $M > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(M) > 0$ mit

$$|f(z)| > M \text{ für alle } z \neq z_0 \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Bew: Sei m die Ordnung der Polstelle.

$\Rightarrow$ $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ ist in z_0 holomorph und $g(z_0) \neq 0$.

Insbesondere ist g in z_0 stetig.

$\Rightarrow$ Es gibt ein $\delta_1 > 0$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$|g(z)| > \varepsilon \quad \forall\, z \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

$\Rightarrow$ Für beliebiges $M > 0$ und $\delta_2 := \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{M}}$ und $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ gilt für $|z - z_0| < \delta$

$$|f(z)| = \left| \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \right| > \frac{\varepsilon}{|z - z_0|^m} > \frac{\varepsilon}{\delta_2^m} = M. \qquad \blacksquare$$