I. Komplexe Zahlen, Folgen und Reihen

1. Rechenregeln für komplexe Zahlen (Wdh.)

- Aus dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ entsteht folgendermaßen der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$\mathbb{C} := \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

wobei $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

Weiter nennt man die komplexe Zahl $i := (0,1)$ die imaginäre Einheit.

- Mit $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ sei

$$z_1 \pm z_2 := (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Bezüglich dieser Addition und Multiplikation ist $\mathbb{C}$ ein Körper mit $(0,0)$ als additives neutrales Element und $(1,0)$ als multiplikative neutrale Element.

- Die Abbildung $x \to (x,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf den Unterkörper $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{C}$.

- Ließe sich $\mathbb{C}$ anordnen, so wäre $(1,0) > (0,0)$
$(-1,0) < (0,0)$ ←
und da in einem angeordnetem Körper die von Null verschiedenen Quadratzahlen positiv sind gilt
$$(a,b)\,(a,b) > (0,0) \quad \forall (a,b) \neq (0,0).$$
Dies Widerspricht $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) < (0,0)$.
$\Rightarrow$ In $\mathbb{C}$ läßt sich keine Anordnung finden.

- Kartesische Schreibweise:
Wegen $(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{C}$
und weil $\mathbb{R}$ isomorph zu $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ ist sei im folgenden $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$
$$x + iy := (x,y).$$

Def: Sei $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$. Dann heißt $x =: Re(z)$ Realteil von z, $y =: Im(z)$,
$\overline{z} := x - iy$ die zu z konjugierte Zahl
$|z| := \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ der Betrag (oder Norm) von z.

- trigonometrische Darstellung, n-te Wurzeln komplexer Zahlen
- Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$$z = x+iy$$
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^{1/2} = r$$
(Radius von z)

$\Rightarrow$ Sieht man die Ebene als komplexe Zahlenebene an, so ergibt das eine Darstellung $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$\varphi = \arg(z)$ Argument von z.

- Für das Produkt zweier komplexer Zahlen

$$z_k = |z_k| (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k) \quad k = 1,2$$

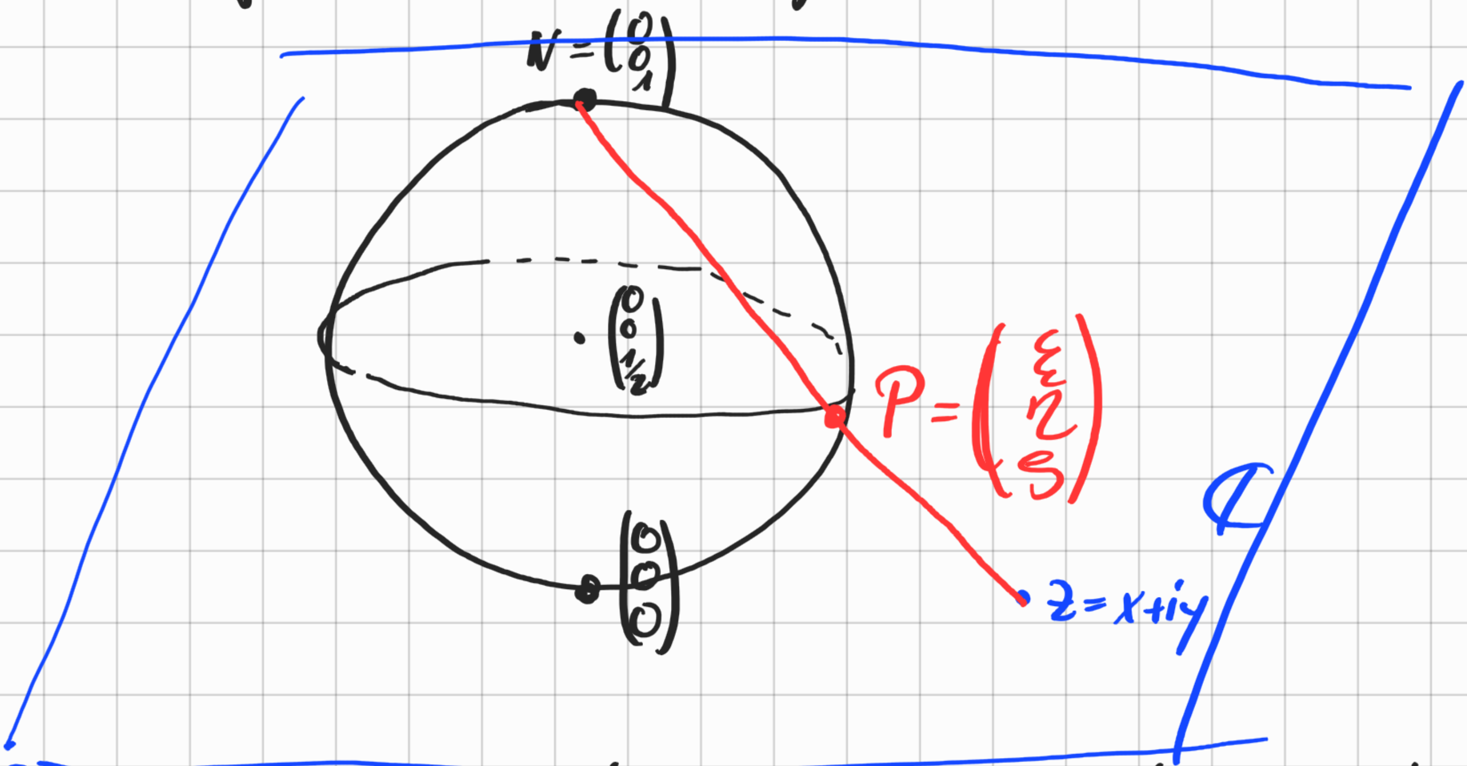
$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2) \right)$$

und induktiv die Formel von Moivre

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{Z}.$$

2. Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

Def.: Sei $S := \left\{ (\xi, \eta, \zeta)^T \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$ die Riemannsche Zahlenkugel (Sphäre) und $N := (0,0,1)^T$ der Nordpol von S. Bei der stereographischen Projektion wird jedem $z = x+iy \in \mathbb{C}$ durch geradlinige Verbindung mit N der eindeutige Schnittpkt. $P = (\xi, \eta, \zeta)^T \in S$ dieser Gerade mit S zugeordnet.



Die Riemannsche Zahlenkugel und die stereographische Projektion.

$\Rightarrow$

$$P: \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0-x \\ 0-y \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-t)x \\ (1-t)y \\ t \end{pmatrix}$$

für ein t
$0 \leq t \leq 1$
$t = \varsigma$.

$$(1-t)^2 x^2 + (1-t)^2 y^2 + (t-\tfrac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$
$$(1-t)^2 |z|^2 + t^2 - t + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$$
$$(1-t)^2 |z|^2 + t^2 - t = 0$$
$$|z|^2 = \frac{t(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{t}{1-t}$$

$$\Rightarrow \quad (1-t)|z|^2 - t = 0$$
$$|z|^2 - t|z| - t = 0$$
$$\frac{|z|^2}{|z|^2+1} = t$$

$$\Rightarrow \quad 1 - t = \frac{1}{|z|^2+1}$$

Umkehrabbildung

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1-t)\,x = \frac{x}{|z|^2+1} \\ \eta &= (1-t)\,y = \frac{y}{|z|^2+1} \\ \varsigma &= t = \frac{|z|^2}{|z|^2+1} \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\xi}{1-t} = \frac{\xi}{1-\varsigma}$$

$$y = \frac{\eta}{1-t} = \frac{\eta}{1-\varsigma}$$

$\Rightarrow$ Die stereographische Abbildung ist eine Bijektion von $\mathbb{C} \to S \setminus \{N\}$ mit

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \varsigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \quad \text{für } |z| \to \infty.$$

Def: Erweiterte komplexe Zahlenebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei ∞ dem Punkt $N = (0,0,1)^T$ auf der Reimannschen Zahlenkugel S entspricht.