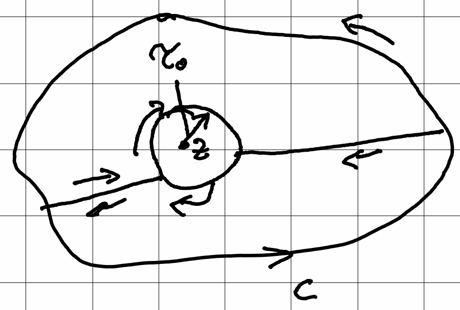
Beweis: Für $z \in \operatorname{In}(C)$ ist $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ in $D \setminus \{z\}$ holomorph. Wir wählen nun ein $r_0 > 0$, sodass der Kreis $|\xi - z| \le r_0$ in $\operatorname{In}(C)$ liegt.



Nun gilt wegen Bemerkung nach Satz III.8 (Verallgemeinerung für (mehrfach) zusammenhängende Gebiete) für alle r mit $0 < r < r_0$

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_{K_r(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

wobei K_r die positiv orientierte Kreislinie $K_r(z) := \{\xi : |\xi - z| = r\}$ ist. Mit $f(\xi) = f(z) + (f(\xi) - f(z))$ und

$$\int_{K_r(z)} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = 2\pi i \qquad (\nearrow \text{Bem. nach Satz 3.8})$$

folgt daher

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f(z) \underbrace{\int_{K_r(z)} \frac{1}{\xi - z}\, d\xi}_{2\pi i} + \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi$$

Da f holomorph in D ist, ist der Integrand $\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}$ in einer Umgebung von z beschränkt, etwa durch die Konstante k und wir erhalten mit Satz III.6.

$$\left| \int_{K_\tau(z)} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} \, d\xi \right| \leq k \cdot L(K_\tau(z)) = k \cdot 2\pi\tau \to 0 \text{ für } \tau \to 0$$

$\Rightarrow$ für $\tau \to 0$ folgt $\displaystyle\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = 2\pi i \, f(z)$ ∎

<u>Folgerung</u>: Mit der Parameterdarstellung $\xi = \xi(t) = z + re^{it}$, $0 \leq t < 2\pi$ für $K_r(z)$ folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} \cdot r \cdot i \cdot e^{it} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt$$

d.h. der Funktionswert im Mittelpkt. des Kreises $K_r(z)$ ist gleich dem „arithm. Mittel" der Funktionswerte auf $K_r(z)$.

Satz III. 12: (Verschärfung der Cauchyschen Integralformel für die n-te Ableitung)

Vor.: wie in Satz III. 11

Beh.: Für alle $z \in \operatorname{In}(C)$ und $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi .$$

Bemerkung: Beachte, dass die Holomorphie einer Funktion f im Gebiet D bereits nach sich zieht, dass f in D sogar beliebig oft differenzierbar ist.

!! Differenzierbarkeit im Komplexen ist wesentlich folgenschwerer als im Reellen !!

Beweis: Sei zunächst $n = 1$ und $z_0 \in \operatorname{In}(C)$ beliebig, fest. Wir wählen $h \in \mathbb{C}$ so, dass $z_0 + h \in \operatorname{In}(C)$ ist und definieren

$$F_1(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} \, d\xi .$$

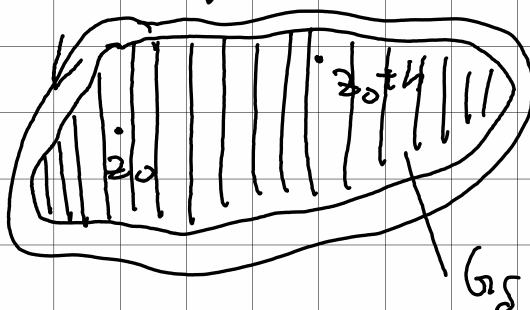
$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - F_1(z_0) \underset{\text{Satz III.11}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_C \Big[\underbrace{\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{\xi - z_0 - h} - \frac{1}{\xi - z_0}\Big) - \frac{1}{(\xi - z_0)^2}} \Big] f(\xi)\, d\xi$$

$$= \frac{1}{h} \frac{(\xi - z_0)^2 - (\xi - z_0)(\xi - z_0 - h) - (\xi - z_0 - h)h}{(\xi - z_0 - h)(\xi - z_0)^2}$$

$$= \frac{h}{(\xi - z_0 - h)(\xi - z_0)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - F_1(z_0) = \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0 - h)(\xi - z_0)^2}\, d\xi$$

Sei nun $G_\delta := \{ z \in \operatorname{In}(C) : |z - \xi| \geq \delta \ \forall\, \xi \in C \}$, wobei $\delta > 0$ so gewählt ist, dass z_0 aus G_δ ist, also $|\xi - z_0| \geq \delta$ gilt.



Wählen $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \frac{\delta}{2}$ so folgt $|\xi - z_0 - h| \geq \frac{\delta}{2}$.

Setzen wir noch $M := \max_{z \in C} |f(z)|$ so ergibt sich mit Satz III.6.

$$\left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - F_1(z_0) \right| \leq L(C) \frac{|h|}{2\pi} \underbrace{\max_{z \in C} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2} \right|}_{\leq \frac{M}{\frac{\delta}{2} \cdot \delta^2}}$$

$$= L(C) \cdot \frac{|h|}{2\pi} \frac{2M}{\delta^3} \to 0 \text{ für } h \to 0$$

gleichmäßig in G_δ.

$\Rightarrow f'(z_0) = F_1(z_0)$ für $z_0 \in \operatorname{In}(C)$ beliebig.

$\Rightarrow$ Beh. des Satzes für $n=1$.

Für $n>1$ führen wir den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Wir sehen

$$F_n(z_0) := \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} \, d\xi$$

und haben zu zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ und $z_0 \in \operatorname{In}(C)$

$$\frac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h} - F_{n+1}(z_0) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \quad \text{gilt.} \quad (*)$$

wie wir bereits für $n=0$ gezeigt haben. Wir nehmen nun an, dass (*) gelte für $n = k-1$ ($k \in \mathbb{N}$, fest) d.h. es sei

$$f^{(k)}(z_0) = F_k(z_0) \quad \text{für } z_0 \in \operatorname{Int}(C) \text{ beliebig}$$

erfüllt. Dann folgt mit

$$\frac{f^{(k)}(z_0+h) - f^{(k)}(z_0)}{h} - F_{k+1}(z_0)$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\xi - z_0 - h)^{k+1}} - \frac{1}{(\xi - z_0)^{k+1}} \right] f(\xi)\, d\xi - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+2}}\, d\xi$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int_C \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\underbrace{(\xi - z_0 - h)}_{b}{}^{k+1}} - \frac{1}{\underbrace{(\xi - z_0)}_{a}{}^{k+1}} \right) - \underbrace{\frac{k+1}{(\xi - z_0)^{k+2}}}_{(b-a)\, n\, a^{-n-1}} \right\} f(\xi)\, d\xi$$

Nun benutzen wir für $\{\ldots\}$ die Beziehung

$$\frac{b^{-n} - a^{-n}}{b-a} + n\, a^{-n-1} = (b-a)\left[a^{-2} b^{-n} + 2 a^{-3} b^{-n+1} + \ldots + n\, a^{-n-1} b^{-1} \right]$$

die für alle $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$ $(a \neq b)$.

Dann setzen wir $a := \xi - z_0$, $b := \xi - z_0 - h$, $n := k+1$ $\Rightarrow$ $b - a = -h$ und erhalten

$$-F_{k+1}(z_0) + \frac{f^{(k)}(z_0+h) - f^{(k)}(z_0)}{h}$$

$$= \frac{k!}{2\pi i} \int_C h \Big\{ 1 \cdot (\xi - z_0)^{-2} (\xi - z_0 - h)^{-k-1} + 2 (\xi - z_0)^{-3} (\xi - z_0 - h)^{-k} + \dots + (k+1)(\xi - z_0)^{-k-2} (\xi - z_0 - h)^{-1} \Big\} f(\xi)\, d\xi$$

Seien G_δ und M wie oben erklärt. Wegen $|\xi - z_0| \geq \delta$, $|\xi - z_0 - h| \geq \frac{\delta}{2}$ und $1 + 2 + \dots + k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ erhalten wir wie in Satz III.6.

$$\left| \frac{f^{(k)}(z_0+h) - f^{(k)}(z_0)}{h} - F_{k+1}(z_0) \right| \leq L(C) \cdot \frac{k!\, |h|}{2\pi} \underbrace{\left\{ \frac{1}{\delta^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{k+1}} + \frac{2}{\delta^3 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{k}} + \dots + \frac{k+1}{\delta^{k+2} \left(\frac{\delta}{2}\right)} \right\}}_{\frac{2^{k+1}}{\delta^{3+k}} \{1 + 2 + \dots + k+1\}} \cdot M$$

$$\leq L(C) \cdot \frac{k!\, |h|}{2\pi} \, \frac{2^{k+1}}{\delta^{3+k}} \, \frac{(k+1)(k+2)}{2} M$$

$\longrightarrow 0$ für $h \to 0$ gleichmäßig in G_δ.

Damit ist gezeigt

$$f^{(n+1)}(z_0) = F_{n+1}(z_0) \quad \text{für } z_0 \in \mathrm{Im}(\mathbb{C}) \text{ beliebig,}$$

so dass nach vollständiger Induktion die Beh. folgt. $\blacksquare$