Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes

Satz III.13 (Morera) Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine in D stetige Funktion. Ferner gelte

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \qquad (*)$$

für jede in D verlaufende stückweise glatte, geschlossene Kurve C.
Dann ist f in D holomorph.

Beweis: Wegen $(*)$ ist $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = F(z)$ unabhängig vom Weg.

$\Rightarrow$ F ist eine Stammfunktion nach Satz III.10.

$\Rightarrow$ $F'(z) = f(z)$

$\Rightarrow$ F ist holomorph in D

wegen Satz III.12 ist F beliebig oft diffbar in D und wegen $F'(z) = f(z)$ auch $f(z)$ $\Rightarrow$ f ist holomorph. ∎

III. 5. Anwendung der komplexen Integralrechnung

a) Cauchysche Ungleichung und Folgerungen

Satz III. 14: (Cauchysche Ungleichung)
Es sei f in einer Umgebung des abgeschlossenen Kreises $D_r(z_0) := \{ z : |z - z_0| \leq r \}$ holomorphe Funktion. Dann gilt für jedes positive $\delta \leq r$ im Kreis $\{ z : |z - z_0| \leq r - \delta \}$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{r}{\delta} \cdot \frac{n!}{\delta^n} \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)| .$$

Beweis:

Für $|z - z_0| < r$ ist $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi .$$

Nun ist $|z - z_0| \leq r - \delta$. Dann ist im Nenner des Integranden $|\xi - z| \geq \delta$ und daher mit Satz III.6

$$|f^n(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \, 2\pi r \, \frac{1}{\delta^{n+1}} \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$$

und damit die Beh. ∎

Folgerung: $\delta = r$ liefert

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{r^n} \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$$

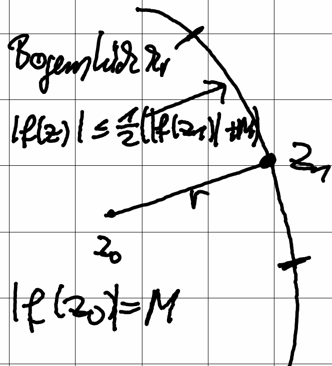
$\delta = \frac{r}{2}$ liefert für $|z - z_0| \le \frac{r}{2}$

$$|f^{(n)}(z)| \le 2^{n+1} \frac{n!}{r^n} \max_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$$

b) Das Maximumprinzip:

Satz III. 15: Ist $f(z)$ auf einem Gebiet G holomorph, so kann $|f(z)|$ in keinem Punkt $z_0 \in G$ ein Maximum annehmen, es sei denn $|f(z)|$ wäre auf G konstant.

Beweis: Angenommen $|f|$ nähme auf G ein Maximalwert M an. Ist $|f|$ nicht konstant auf G so existiert mind. ein Punkt $z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| = M$ der zugleich die Eigenschaft hat, dass es in einer noch ganz zu G gehörenden (kreisförmige) Umgebung von z_0 einen Punkt z_1 mit $|f(z_1)| < M$ gibt.



Sei K_r der Kreis um z_0 mit dem Radius $r = |z_1 - z_0|$. Wegen der Stetigkeit von $|f|$ gibt es $|f(z_1)| < M$ dann auf diesem Kreis ein Bogenstück γ_r mit einer Länge φr $(0 < \varphi \le 2\pi)$, dem z_1 angehört und auf dem $|f(z)| \le \frac{1}{2}(|f(z_1)| + M)$

Mit Satz III. 11 der Cauchyschen Integralformel folgt

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{K_r \setminus \gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\, d\xi\right|$$

Satz III. 6.

$$\le \frac{1}{2\pi} \underbrace{\max_{\xi \in K_r \setminus \gamma_r} \left|\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\right|}_{\le \frac{M}{\cancel{r}}} \cdot (2\pi - \varphi)\cancel{r} + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\max_{\xi \in \gamma_r} \left|\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\right|}_{\frac{\frac{|f(z_1)| + M}{2}}{\cancel{r}}} \varphi \cancel{r}$$

$$= \frac{M(2\pi - \varphi)}{2\pi} + \frac{\frac{|f(z_1)| + M}{2}}{2\pi}\varphi = M - \frac{M\varphi}{2\pi} + \frac{|f(z_1)|\varphi}{4\pi} + \frac{M\varphi}{4\pi}$$

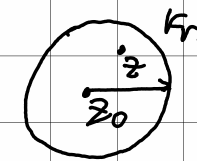
$$= M - \frac{L}{4\pi}\Big(\underbrace{M - |f(z_1)|}_{>0}\Big) < M \qquad \text{also } M < M \quad ⚡. \quad \blacksquare$$

c) Potenzreihenentwicklung

Satz II.16: (Taylor-Entwicklung holomorpher Funktionen).
Ist $f(z)$ in z_0 und auf einer kreisförmigen Umgebung von z_0 holomorph, so ist $f(z)$ auf dieser Umgebung in eine Potenzreihe um den Punkt z_0 entwickelbar und zwar gilt in Analogie zur Taylor-Entwicklung beliebig oft diffbar. Funktionen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n .$$

Beweis: Da z in einer (kreisförmigen) Umgebung U von z_0 liegt, gibt es einen ganz in U liegenden Kreis K_r um z_0, der auch z umschließt.



Mit der Cauchyschen Integralformel gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \underbrace{\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)}}_{\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}} \, d\xi$$

Dabei ist $|z - z_0| < r = |\xi - z_0|$, d.h. $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n$$

diese geom. Reihe gleichmäßig (bezüglich ξ bei festem z und festem z_0) konvergiert und kann daher entlang des Kreises K_r gliedweise integriert werden

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} \, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\frac{n!}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi}_{= f^{(n)}(z_0) \text{ Satz II.12.}} \, (z - z_0)^n$$

Bemerkung: Der Entwicklungssatz hat im Reellen kein Analogon. Es gibt unendlich oft differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die in keiner Umgebung des Nullpunktes in eine Potenzreihe entwickelbar sind.

Standardbeispiel:

$$f(x) := \exp(-x^{-2}) \text{ für } x \neq 0, \quad f(0) := 0$$

Es gilt: $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$