d) ganze Funktionen

Def: Eine in der ganzen komplexen Zahlenebene holomorphe Funktion heißt ganze Funktion.

Beispiele für ganze Funktionen sind: e^z, Polynome, $\sin(z)$, $\cos(z)$

Satz III.17 (Satz von Liouville)

Sei f in ganz $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant.

(d.h. Die Konstanten sind die einzigen ganzen Funktionen, die in ganz $\mathbb{C}$ beschränkt sind.)

Beweis: Sei $M > 0$ eine Schranke für $|f|$ in $\mathbb{C}$:

$$|f(z)| < M \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Nach der Cauchy-Ungleichung (Satz III.14, Folgerung $\delta = r$) gilt dann für jedes $r > 0$ und $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \leq \frac{1!}{r^1} \max_{|\xi| = r} |f(\xi)| \leq \frac{M}{r}$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang $r \to \infty$, $|f'(z)| = 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow f \equiv \text{const}$ in $\mathbb{C}$ ($\nearrow$ Beweis von Satz III.10). ∎

Satz III.18: (Fundamentalsatz der Algebra)
Jedes Polynom vom Grad n in z
$$P_n(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$
mit komplexen Koeffizienten a_i $(i = 0, \dots, n-1)$ und $n \geq 1$ besitzt mind. eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis: (indirekt) Wir nehmen an $P_n(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Dann ist durch $f(z) := \frac{1}{P_n(z)}$ eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f erklärt. Wenn
$$|P_n(z)| = |z^n| \, \left| 1 + a_{n-1} \frac{1}{z} + a_{n-2} \frac{1}{z^2} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n} \right|$$
und
$$\left| a_{n-1} \cdot \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{für hinreichend große } |z|$$
folgt
$$|P_n(z)| \geq |z^n| \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{|z|^n}{2} \to \infty \quad \text{für } |z| \to \infty.$$
$\Rightarrow$ $|f(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$
$\Rightarrow$ f ist also in ganz $\mathbb{C}$ beschränkt
$\Rightarrow$ nach Satz III.17 sind f und damit P_n konstante Funktionen.
$\lightning$ Widerspruch
$\blacksquare$

<u>Folgerung</u>: Jedes Polynom $P_n(z)$ vom Grad $n \geq 1$ läßt sich in der Form

$$P_n(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$$

darstellen, besitzt also genau n Nullstellen. Diese können auch mehrfach auftreten.

Beweis: Für $n=1$ gilt $P_n(z) = z-(-a_0)$.
Für $n>1$ besitzt $P_n(z)$ mind. eine Nullstelle z_n, so dass sich $P_n(z)$ in der Form

$$P_n(z) = (z-z_n)\,P_{n-1}(z)$$

mit einem Polynom $P_{n-1}(z)$ vom Grade $n-1$ darstellen läßt. Nun wenden wir auf P_{n-1} den Satz III.18 an. ∎

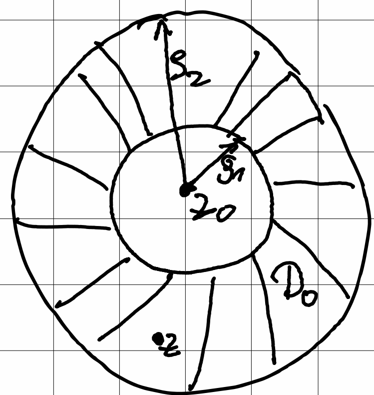
IV Isolierte Singularitäten

bisher: Potenzreihenentwicklung von Fkt. die in einem Gebiet um D holomorph sind um beliebige Pkt. $z_0 \in D$.

jetzt: Reihenentwicklung um Singularitäten.

IV. 1. Holomorphe Funktionen in Ringgebieten

Wir betrachten einen Kreisring $D_0 = \{ z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2,$
$0 \leq \rho_1 < \rho_2 < \infty \}$



f sei eine in D_0 holomorphe Funktion

Ziel: f in eine Reihe nach Potenzen von $(z - z_0)$ zu entwickeln

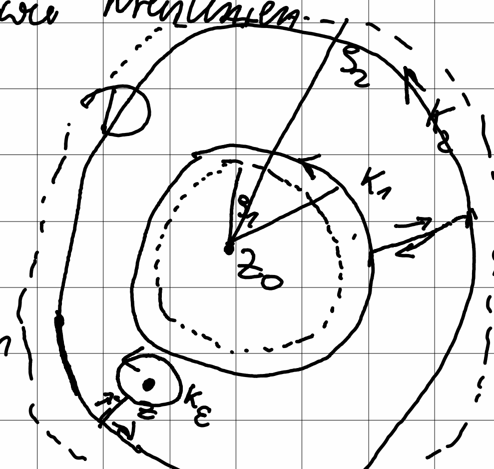
Idee: wählen $z \in D_0$ beliebig und zwei Kreislinien

$K_1 = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = r_1 \}$

$K_2 = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = r_2 \}$

mit $\rho_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < \rho_2$

$K_\varepsilon = \{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| = \varepsilon \}$ wobei K_ε ganz in den durch K_1 und K_2 begrenzten Gebieten liegen. Die Kreise K_1, K_2, K_ε orientieren wir positiv.



$$\Rightarrow \int_{K_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int_{K_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int_{K_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = 0$$

(Cauchyscher Integralsatz, Folgerung)

Es gilt $\int_{K_\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \to 2\pi i\, f(z)$ für $\varepsilon \to 0$

(Cauchysche Integralformel).

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Wir folgern wie im Beweis von Satz III.16

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) - (z - z_0)}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}\, d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(\xi)}{(z - z_0)\left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)}\, d\xi$$

Im ersten Integral ist $\xi \in K_2$, so dass $\frac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|} < 1$

im zweiten Integral ist $\xi \in K_1$, so dass $\frac{|\xi-z_0|}{|z-z_0|} < 1$.
Fasst man deshalb die Werte

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-\frac{\xi-z_0}{z-z_0}}$$ als Grenzwert geometrischer

Reihen auf so folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^r d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\xi)}{z-z_0}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^r d\xi$$

Berücksichtigen wir die gleichmäßige Konvergenz (gleichmäßig bzgl. ξ bei festem z und z_0) entlang der Integrationswege, so dürfen wir gliedweise integrieren und es ergibt sich

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{K_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{r+1}}\,d\xi\right)(z-z_0)^r + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{-r}}\,d\xi\,(z-z_0)^{-(r+1)}$$

Ersetzen wir in der zweiten Summe k durch $-(k+1)$ so folgt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi\right)(z-z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi\right)(z-z_0)^k$$

Sei nun K ein beliebiger positiv orientierter Kreis um z_0 der im Innern von D_0 liegt, dann können wir die Integrationswege durch K ersetzen und wir erhalten

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad (*)$$

mit

$$a_k := \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi \qquad k\in\mathbb{Z}. \qquad (**)$$

$\Rightarrow$ <u>Satz IV. 1</u> Sei f im Ringgebiet

$$D_0 = \{ z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 , \quad 0 \leq \rho_1 < \rho_2 < \infty \}$$

holomorph. Dann läßt sich f in D_0 in eine Laurent-Reihe (*) entwickeln deren Koeffizienten durch (**) gegeben wird. Hierbei ist K ein positiv orientierter Kreis um z_0 der im Innern von D_0 liegt. Die Laurent-Reihe (*) konvergiert absolut in D_0 und gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von D_0.