Satz IV.5: (Casorati-Weierstraß)

Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so kommt f in jeder beliebig kleinen Umgebung von z_0 jedem komplexen Wert beliebig nahe, d.h. zu beliebigem $a \in \mathbb{C}$ und zu jedem Paar $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ gibt es ein z_1 mit

$|f(z_1) - a| < \varepsilon$ und $|z_1 - z_0| < \delta$.

<u>Beweis:</u> (indirekt). Annahme es gäbe ein $\tilde{\omega}$ und ein Paar

$$\tilde{\varepsilon} > 0, \ \tilde{\delta} > 0 \text{ so dass}$$

$$|f(z) - \tilde{\omega}| \geq \tilde{\varepsilon} \quad \forall z \text{ mit } 0 < |z - z_0| < \tilde{\delta}.$$

Wir betrachten

$$h(z) := \frac{1}{f(z) - \tilde{\omega}} \quad \Rightarrow \quad |h(z)| < \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \ \forall z \text{ mit } |z - z_0| < \tilde{\delta}$$

und h ist dort holomorph.

$\Rightarrow$ Mit Satz IV 3. ist

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{für } z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} h(z) & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

in z_0 holomorph. Insbesondere existiert dieser Grenzwert.

Für $\tilde{h}$ gilt daher entweder

a) $\tilde{h}(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$ $\qquad h(z_0) = a_0 \neq 0$

oder

b) $\tilde{h}(z) = (z-z_0)^m g(z) \qquad g(z_0) \neq 0,\ m \in \mathbb{N},\ g$ holomorph

a) entfällt da sonst die Holomorphie von f in z_0 folgen würde. Aus b) folgt aber, dass f eine Polstelle der Ordnung m in z_0 hat. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass f eine wesentliche Singularität in z_0 hat. ∎

IV.3. Der Residuensatz

- Ziel: Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes.

Wdh.: Laurententwicklung einer holomorphen Funktion f im punktierten Kreisgebiet $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| \leq r\}$ lautet

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad ; \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

__Def__: Der Koeffizient $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} f(\xi)\, d\xi$ der Laurentreihe von f um z_0 heißt Residuum von f an der Stelle z_0.

Schreibweise: $a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ $\left(\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_0} , \operatorname{Res}(f, z_0) \right)$

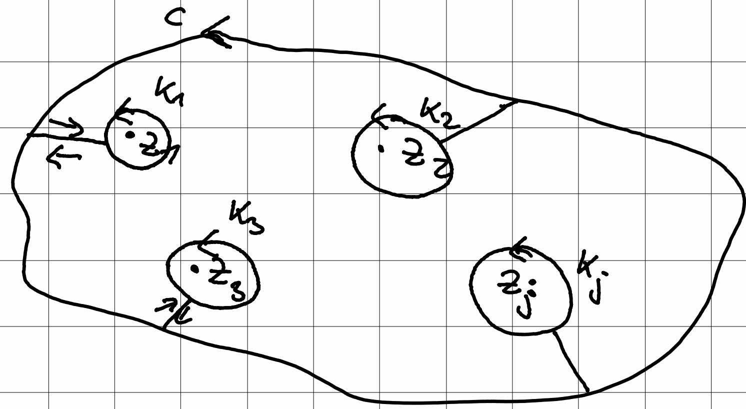
__Beispiel:__ $f(z) = \frac{7}{z-2} + 2(z-2)^0 + 1(z-2)$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = 7.$$

__Satz IV. 6__ (Residuensatz): Es sei C eine geschlossene, doppelpunktfreie, stückweise glatte positiv orientierte Kurve. Ferner sei f holomorph im $\operatorname{In}(C) \cup C$ mit Ausnahme von endlich vielen isolierten Singularitäten von $z_1, \dots, z_n$, die im $\operatorname{In}(C)$ liegen. Dann gilt

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

Bew:



Zu jedem Pkt. z_j $(j=1,\dots,n)$ wählen wir positiv orientierte Kreise K_j um z_j mit $K_j \subset \mathrm{In}(C)$
$(K_m \cup \mathrm{In}(K_m)) \cap (K_n \cup \mathrm{In}(K_n)) = \emptyset$ für $m \neq n$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{K_j} f(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{K_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) .$$

Bem: Der Wert $\int_C f(z)\,dz$ ist vollständig durch die Residuen von f im Inneren von C bestimmt, die man mit Hilfe der jeweiligen Laurent-Entwicklung bestimmen kann.

Lemma IV.7: Die Funktion h sei holomorph in einer Umgebung von z_0 und f sei durch
$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} \qquad m \in \mathbb{N} \qquad h(z_0) \neq 0$$
erklärt.

Dann gilt $$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\, h^{(m-1)}(z_0)$$

Beweis: Mit der Cauchyschen Integralformel für die $(m-1)$ Ableitung von h gilt
$$h^{(m-1)}(z_0) = \frac{(m-1)!}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{h(\xi)}{(\xi - z_0)^m}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(z_0)} \frac{h(\xi)}{(\xi - z_0)^m}\, d\xi$$
$$= \frac{1}{(m-1)!}\, h^{(m-1)}(z_0)$$

■