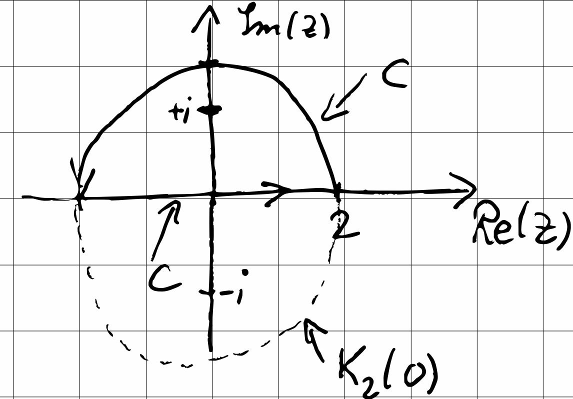
Beispiel: ges.: a) $\int_C \frac{dz}{1+z^2}$



Beachten wir, dass nur die Polstelle $z=i$ im Innern von C liegt, so gilt

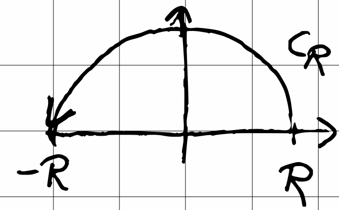
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

mit $h(z) = (z-i)\,f(z) = \frac{1}{2i}\left(1 - \frac{z-i}{z+i}\right)$ und dem obigen Lemma $(z_0 = i,\ m = 1)$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = h(i) = \frac{1}{2i}$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

b) ges.: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$



Nun gilt wegen a) $\qquad R > 1$

$$\pi = \int_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}$$

und mit
$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \underbrace{\ell(C_R)}_{\pi R} \cdot \underbrace{\max_{z \in C_R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right|}_{= \frac{1}{R^2-1}} = \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 \text{ für } R \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \,.$$

IV. 4. Anwendung des Residuensatzes in der reellen Analysis

1.) Integrale der Form $\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt$

$R(x,y)$ ist eine rationale Funktion, sodass $R(\cos(t), \sin(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Es gilt $\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right) dt$$

Kurvenintegral $|z| = 1$ $\quad z = e^{it}$ $\qquad \frac{dz}{dt} = ie^{it}$; $\frac{dz}{iz} = dt$

$$= \int_{K_1(0) \hat{=} |z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz}\, dz$$

Mit dem Residuensatz gilt

$$= 2\pi \sum_{|z_i|<1} \operatorname{Res}_{z = z_i} \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) .$$

<u>Beispiel:</u> Für $a > 1$ ist

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos(t)} = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{z}\, dz$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}$$

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2-1}$$
$$z_2 = -a - \sqrt{a^2-1}$$

$$= 2\pi \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{z-z_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{z-z_2}}_{h(z)} \quad \text{siehe Lemma } m=1$$

$$= \frac{1}{z_1-z_2}$$

$$= 2\pi \frac{1}{z_1-z_2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}}}\,.$$

2. Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx$

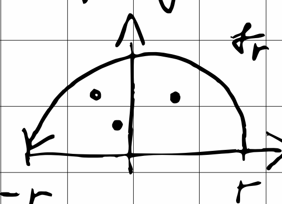
$R(x)$ ist eine rationale Funktion.

Lemma IV.8: Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion, die auf $\mathbb{R}$ keine Pole hat, der Grad des Nenners sei um mindestens zwei größer als der Grad des Zählers.

Dann ist
$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}_{z=\xi} R(z)$$

Beweis: Das Integral existiert wegen der Grad-Bedingung für Nenner und Zähler.

Sei $\gamma_r : [0,\pi] \to \mathbb{C}$, $t \to r e^{it}$



Für hinreichend großes r liegen alle Pole von $R(z)$ in $K_r(0)$.

$$\Rightarrow \int_{[-r,r]} R(z)\,dz + \int_{\gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}_{z=\xi}\big(R(z)\big).$$

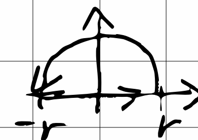
Für große $|z|$ ist $|R(z)| < \frac{c}{|z|^2}$ mit einer Konstanten c, wegen der Grad-Bed.

$\Rightarrow$ Für große r gilt $\left|\int_{\gamma_r} R(z)\,dz\right| \le \pi r \cdot \frac{c}{r^2} = \frac{\pi c}{r} \to 0$ für $r \to \infty$.

$\Rightarrow$ Beh. ∎

Beispiel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$

Wir berechnen $\displaystyle I(R) = \int_C \frac{z^2}{1+z^4}\, dz$ wobei $C = [-r,r] + \gamma_r$ ist



$f(z)$ hat Singularitäten bei den Nenner-Nullstellen

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\quad z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\quad z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$(1+z^4) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

z_2 und z_3 werden nicht von C umschlossen, wohl aber z_1, z_4.
Nun gilt mit Lemma IV.7

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z-z_1} \cdot \underbrace{\frac{z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}}_{=h(z)} = \frac{z_1^2}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_4} f(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{z_4^2}{(z_4-z_1)(z_4-z_2)(z_4-z_3)} = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

Mit Lemma IV.8 gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) - \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}\,. \qquad \square$$