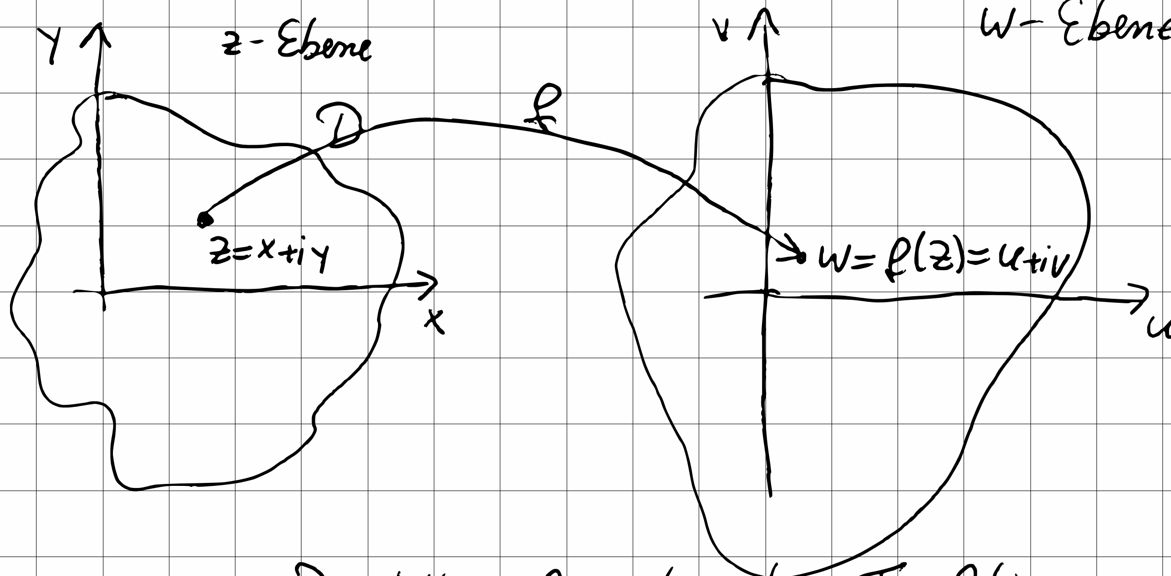
V Geometrische Funktionentheorie

VI. Konforme Abbildungen



geom. Darstellung komplexwertiger Funktionen

Ziel: Welche geometrischen Eigenschaften kennzeichnen Abbildungen die durch holomorphe Funktionen vermittelt werden.

Wir betrachten eine glatte, orientierte Kurve C in der z-Ebene, die durch den Punkt z_0 verlaufe.

Durch $z = z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad a \le t \le b$
sei eine Parameterdarstellung von C mit

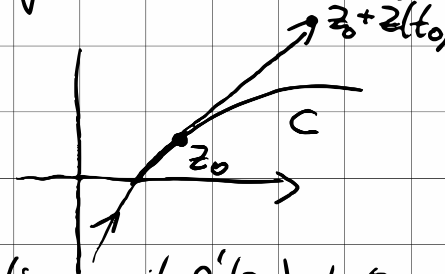
$$|z'(t)|^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0 \quad \text{für} \quad a \le t \le b \qquad (*)$$

gegeben, so besitzt z in jedem Punkt

$z_0 = z(t_0), \quad t_0 \in [a,b]$ eine Tangente. Sie ist durch

$$z_0 + t\, z'(t_0) \qquad t \in \mathbb{R}$$

gegeben.



Sei f eine in z_0 holomorphe Funktion mit $f'(z_0) \neq 0$ und C^* die Bildkurve von C bei Abbildung durch f. f bildet C in die orientierte Kurve C^* mit der Parameterdarstellung

$$w = w(t) = f(z(t)) \qquad a \le t \le b$$

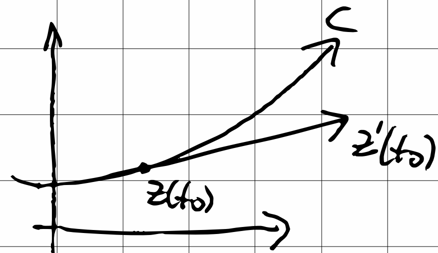
ab.

Der Pkt. z_0 besitzt den Bildpunkt $w(t_0) = f(z_0)$.

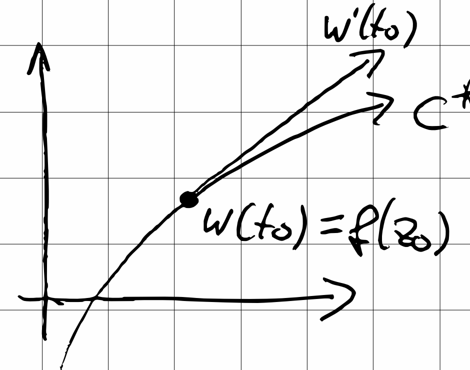
$\Rightarrow \quad w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) \qquad a \le t \le b \quad$ (Kettenregel)

aus $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow w'(t_0) \neq 0 \quad$ (wegen $* \; |z'(t)| \neq 0$).

Aus der Stetigkeit von $w'(t)$ folgt $w'(t) \neq 0$ in einer Umgebung von t_0. $\Rightarrow$ Die Bildkurve C^* von C besitzt im Punkt $f(z_0)$ eine Tangente.



z-Ebene



$$w'(t_0) = f'(\underbrace{z(t_0)}_{z_0}) \cdot z'(t_0)$$

(Es gilt $z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$

$\varphi_1 = \arg(z_1)$

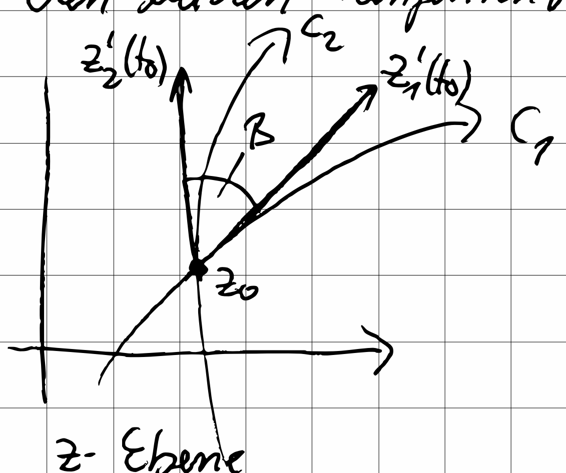
$\varphi_2 = \arg(z_2)$

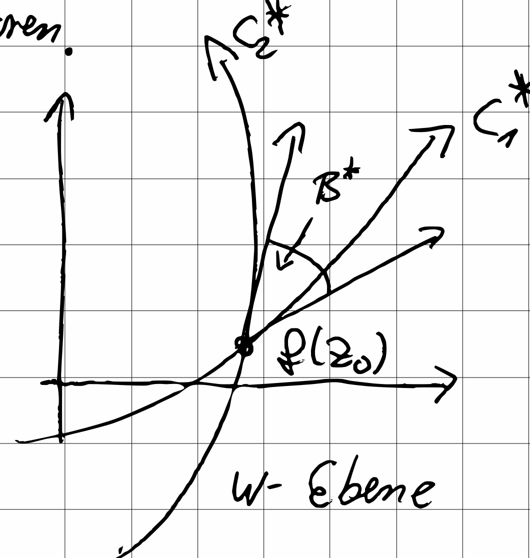
d.h. bei Multiplikation zweier komplexer Zahlen ($\neq 0$) addieren sich die Argumente).

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0) + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ Wir erhalten also die Tangentenrichtung von C^* im Punkt $f(z_0)$ dadurch, dass wir die Tangentenrichtung von C im Punkt z_0 um den Winkel $\alpha := \arg f'(z_0)$ drehen.

- Wir betrachten jetzt zwei Kurven C_1 und C_2 die durch z_0 verlaufen und den Winkel β $(-\pi < \beta \leq \pi)$ zwischen den beiden Tangentenvektoren.





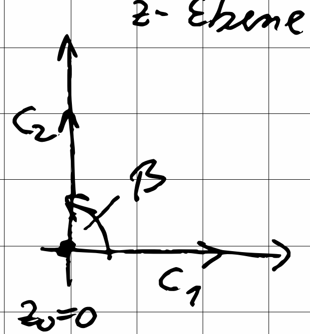
Für die Bildkurven C_1^*, C_2^* von C_1, C_2 erhalten wir

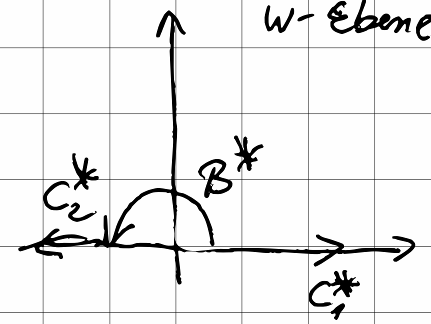
$$\arg w_1'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_0) + 2\pi k_1 \qquad k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$\arg w_2'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(t_0) + 2\pi k_2 \qquad k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\underbrace{\arg w_1'(t_0) - \arg w_2'(t_0)}_{B^*} = \underbrace{\arg z_1'(t_0) - \arg z_2'(t_0)}_{B} + 2\pi(k_1 - k_2)$$

d.h. eine in z_0 holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ vermittelt eine Abbildung, bei der der Winkel zwischen Tangentenpaaren erhalten bleibt. Diese Abbildung heißt <u>winkeltreu</u> im Punkt z_0.

<u>Bem:</u> Auf die Forderung $f'(z_0) \neq 0$ kann nicht verzichtet werden. $f(z) = z^2$ ist im Pkt. $z_0 = 0$ <u>nicht</u> winkeltreu. Diese Funktion ist holomorph in z_0 und es gilt $f'(z_0) = 0$.





- positive reelle Achse wird in sich abgebildet
- die imaginäre Achse $(iy)^2 = -y^2$ wird in die negative reelle Achse abgebildet

<u>Def</u>: Eine Abbildung heißt <u>konform</u> im Punkt z_0, falls f in z_0 holomorph ist und $f'(z_0) \neq 0$ gilt.
f ist konform in einem Gebiet D, falls f in jedem Punkt $z_0 \in D$ konform ist.

<u>Beispiel:</u> $f(z) = e^z$, f ist in ganz $\mathbb{C}$ holomorph mit
$$f'(z_0) = e^{z_0} \neq 0 \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}$$
$\Rightarrow f$ ist in $\mathbb{C}$ konform.

- Jede in einem Gebiet konforme Abbildung f ist winkeltreu. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung ist f außerdem lokal umkehrbar eindeutig.

V. 2. Der Riemannsche Abbildungssatz

Frage: Welche Gebiete lassen sich konform aufeinander abbilden?

Riemannscher Abbildungssatz: Seien D und D^* einfach zusammenhängende echte Teilgebiete von $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine konforme Abbildung f, die D umkehrbar eindeutig auf D^* abbildet.

Bemerkungen:

- Aus dem Satz von Liouville folgt, dass es keine konforme Abbildung von $\mathbb{C}$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ geben kann, denn sei etwa D^* das Innere des Einheitskreises, dann müßte es eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe nicht konstante Funktion f mit $|f(z)| < 1 \;\; \forall\, z \in \mathbb{C}$ geben.
  (Nach Satz III. 17, Liouville) ist das nicht möglich.
- Ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet kann nicht eindeutig und konform auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet abgebildet werden. (Folgt aus Stetigkeitsbetrachtungen).

Satz V. 2 (Satz über die Ränderzuordnung)
Die Ränder ∂D und ∂D^* seien stetig, eineindeutige doppelpunktfreie geschlossene Wege und $f: D \to D^*$ sei konform und bijektiv. Dann ist $f: \underset{D \cup \partial D}{\bar{D}} \to \underset{D^* \cup \partial D^*}{\bar{D}^*}$

bijektiv und stetig.