V.3 Spezielle konforme Abbildungen

a) Gebrochene lineare Abbildungen, Möbius-Transformation

Für gegebene $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ definieren wir die gebrochene lineare Abbildung

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad z \in \mathbb{C}, \quad c \cdot d \neq 0 \quad (*)$$

1. Fall: $c = 0,\ d \neq 0$ (ganze lineare Abbildung)

$$f(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = A z + B$$

Die Abbildung bewirkt

- eine Streckung (bzw. Stauchung) um den Faktor $|A|$ bezogen auf den Nullpkt.
- eine Drehung um den Nullpkt., Drehwinkel $\hat{=} \arg(A)$
- eine Parallelverschiebung um den komplexen Vektor B

2. Fall: $c \neq 0$

$$f(z) = \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}$$

$$\frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a(cz+d)}{c(cz+d)} = \frac{c(b+az)}{c(cz+d)}$$

d.h.

$z \to z_1 := cz + d$ ganze lineare Abbildung

$z_1 \to z_2 := \frac{1}{z_1}$ Spiegelung am Einheitskreis

$z_2 \to w := \frac{bc-ad}{c} z_2 + \frac{a}{c}$ ganze lineare Abbildung

Diese Nacheinanderausführung heißt Möbius-Transformation

Spiegelung am Einheitskreis $z \to \frac{1}{z}$

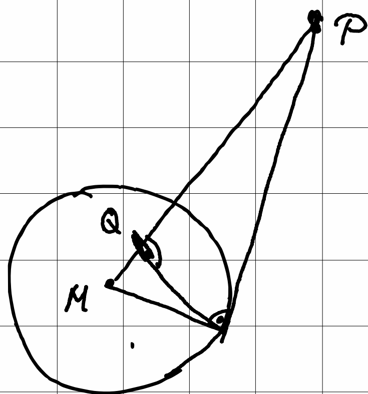
Mit $z = x+iy$ folgt $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$

Dem Punkt $P=(x,y)$ entspricht also der Bildpkt.

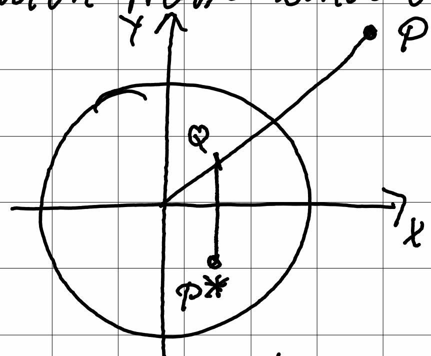
$$P^* = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

Die Spiegelung an einem Kreis mit dem Mittelpkt. M und Radius r:
Der Bildpkt. $P \neq M$ ist der Punkt Q, der auf dem Strahl von M durch P liegt und für den $|MP| \cdot |MQ| = r^2$ gilt.

Kathetensatz im Δ.



$\Rightarrow$ Wir spiegeln P zunächst am Einheitskreis $M=(0,0),\ r=1$. Der Spiegelpkt. sei Q. Nun spiegeln wir Q an der reellen Achse und erhalten P^*.



Für $c \neq 0$ und $ad-bc \neq 0$ ist mit den Vereinbarungen $f(P_\infty) = \frac{a}{c}$ und $f\left(-\frac{d}{c}\right) = P_\infty$ die gebrochene lineare Abbildung (*) $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ bijektiv.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$z = f^{-1}(w) = \frac{b - dw}{cw - a}.$$

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

$\Rightarrow$ Die gebrochene lineare Abbildung mit $ad - bc \neq 0$ ist eine konforme und bijektive Abbildung von $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ auf die Menge $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

b) Die Joukowski-Funktion

$$w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad z \neq 0$$

Man kann zeigen, dass sowohl

$$J : \{|z| < 1\} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

als auch

$$J : \{|z| > 1\} \to \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$$

bijektiv und konform sind.

Anwendung: Strömungsmechanik

Randwertaufgaben der Potentialtheorie können mit Hilfe der konformen Abbildungen gelöst werden.