3. Elementare Funktionen

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \; ; \quad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \, , \quad \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

Offenbar ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe gleich ∞. Wir schreiben auch e^z für $\exp(z)$, interpretieren das Symbol für $z \notin \mathbb{R}$ aber vorläufig nicht als Potenz.

Wdh.: Cauchy Produkt von unendlichen Reihen:

Es gilt
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\left(a_0 b_0 + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0\right)}_{c_n}$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Die Folge $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt Faltung der Folgen (a_n) und (b_n). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent mit den Summen A und B, wobei wenigstens eine Reihe absolut konvergent ist, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent, wobei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$ gilt.

Anwendung dieses Satzes auf $e^{z_1} e^{z_2}$ liefert.

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{z_1^k z_2^l}{k!\, l!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\frac{n!}{k!(n-k)!}} z_1^k z_2^{n-k}}_{(z_1+z_2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1+z_2)^n = \exp(z_1+z_2)$$

$$= e^{z_1+z_2}$$

$\Rightarrow$ Eigenschaften von e^z:

- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$; $e^z \neq 0$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ da $e^z e^{-z} = e^0 = 1$
- Für $y \in \mathbb{R}$ gilt
  $$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$
- Für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
  $$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$ (Eulersche Formel).

Beweis: Nach Def. von e^z gilt

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wegen

$$i^k = \begin{cases} (-1)^n & \text{für } k = 2n, \ n = 0, 1 \ldots \\ (-1)^n i & \text{für } k = 2n+1, \ n = 0, 1 \ldots \end{cases}$$

ergibt sich

$$e^{iy} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}}_{\cos(y)} + i \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin(y)}$$

$\Rightarrow$

$$|e^z| = e^x = e^{Re(z)}$$

$$\arg(e^z) = y = Im(z),$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Aus der Def. von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ folgt unmittelbar $\cos(-z) = \cos(z)$ $\sin(-z) = -\sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Aus den Reihen e^{iz} und e^{-iz} gewinnen wir die Beziehung

$$e^{iz} + e^{-iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(i^k + (-i)^k\right) \frac{z^k}{k!}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = 2\cos(z)$$ und entsprechend

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin(z).$$

II Grundlegende Eigenschaften holomorpher Funktionen

Wdh: δ-Umgebung eines Punktes, innerer Pkt, Randpkt, Häufungspkt., offene und abgeschlossene Mengen aus $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Diese Begriffe werden im metrischen Raum $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ durch die Metrik des euklidischen Abstands

$\|x - x^*\| \ \forall x, x^* \in \mathbb{R}^d$ bzw. $|z - z^*| \ \forall z, z^* \in \mathbb{C}$ definiert.

Sei im Folgenden $M \subset \mathbb{C}$ oder $M \subset \mathbb{R}^d$, $M \neq \emptyset$.

$\bar{M}$ der Abschluß, ∂M der Rand, $\mathring{M}$ das Innere und M' die Menge der Häufungspkt. von M.

Def.: • Für $f: M \to \mathbb{C}$, $z_0 \in M'$ gilt $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in \mathbb{C}$

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \, 0 < |z - z_0| < \delta, \ z \in M \text{ gilt } |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

• $f(z): M \to \mathbb{C}$ heißt <u>stetig</u> in $z_0 \in M \cap M'$ $:\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Bemerkung: • $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \iff \forall (z_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $M\setminus\{z_0\}$ mit $z_n \to z_0$ gilt $f(z_n) \to w_0$ $(n\to\infty)$.

• f ist stetig in $z_0 \in M \cap M' \iff \forall (z_n)_{n=1}^{\infty}$ aus M mit $z_n \to z_0$ gilt $f(z_n) \to f(z_0)$ $(n \to \infty)$.

$\Rightarrow f(z)$ stetig in $z_0 \iff \operatorname{Re} f(z)$ und $\operatorname{Im} f(z)$ stetig in z_0.

Def: Sei $L = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Eine auf $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion $z(t) : [\alpha,\beta] \to L$ definiert eine Kurve C in L.

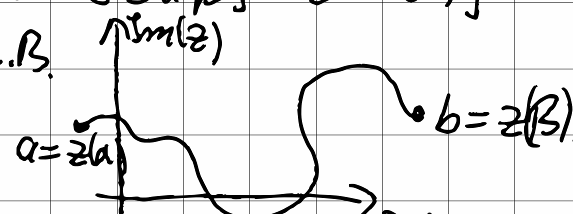
$a := z(\alpha)$ Anfangspkt. von C

$b := z(\beta)$ Endpkt. von C

Mit C wird auch der Träger der Kurve C, d.h.

$$\{ z \in L : \exists\, t \in [\alpha,\beta] : z = z(t) \}$$

bezeichnet. z.B.



Kurve in $\mathbb{C}$, $L=\mathbb{C}$

Def.: Sei $L = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. $G \subset L$ heißt ein Gebiet

$:\Leftrightarrow$ G ist offen und kurvenzusammenhängend, d.h. zu je zwei Pkt. $a, b \in G$ $\exists$ Kurve $z(t) : [\alpha, \beta] \to G$ mit $z(\alpha) = a$, $z(\beta) = b$.

(d.h. es existiert eine Kurve die a mit b innerhalb von G verbindet.).