Def: Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathring{M}$. $f(z): M \to \mathbb{C}$ heißt in z_0 (komplex) **diffbar**

$$:\Leftrightarrow \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. $f'(z_0) = \frac{d}{dz} f(z) \Big|_{z=z_0}$ heißt Ableitung von f in z_0.

Existiert $f'(z)$ in einer Umgebung $U(z_0)$ von z_0, so wird $f''(z_0) := \frac{d}{dz} f(z) \Big|_{z=z_0}$ und analog $f^{(k)}(z_0) := \frac{d}{dz} f^{(k-1)}(z) \Big|_{z=z_0}$

$f^{(0)}(z) = f(z)$ definiert.

Bemerkung: $M \subset \mathbb{C}$

- $f(z)$ ist in z_0 diffbar $\Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{C}, \exists\, r(z): M \to \mathbb{C}$ mit

$$\frac{r(z)}{|z - z_0|} \to 0 \quad (z \to z_0) \text{ und für } \forall z \in M \text{ gilt}$$

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + r(z) \quad \text{mit } r(z_0) = 0 \text{ und dann gilt } a = f'(z_0).$$

- f in z_0 diffbar $\Rightarrow$ f stetig in z_0

- Es gelten die bekannten Rechenregeln aus der reellen Analysis.
- Sei $f: A \to B$ Bijektion, f diffbar in $z_0 \in \mathring{A}$ und $w_0 = f(z_0) \in \mathring{B}$. Sei $z = g(w)$ die zu f inverse Funktion $g = f^{-1}: B \to A$ mit $g(f(z)) = z \ \forall z \in A$, $f(g(w)) = w \ \forall w \in B$. Sei $f'(z_0) \neq 0$ und $g(w)$ stetig in w_0. Dann ist $g(w)$ diffbar in w_0 und es gilt: $$\frac{d}{dw} g(w)\Big|_{w=w_0} = \frac{1}{\frac{d}{dz} f(z)\Big|_{z=z_0}} \quad \text{oder } g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(g(w_0))}$$

Beweis: $w \neq w_0$ in $B \Rightarrow z \neq z_0$ in A

$$\Rightarrow \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \to \frac{1}{f'(z_0)} \quad (w \to w_0)$$

da $w \to w_0 \Rightarrow z = g(w) \to z_0 = g(w_0)$. ∎

<u>Def</u>: Sei $M \subset \mathbb{C}$.

- $f(z): M \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in \mathring{M}$ <u>holomorph</u> (analytisch, regulär) $:\Leftrightarrow \exists\, U_\delta(z_0) \subset M$ so dass $f(z)$ in jedem $z \in U_\delta(z_0)$ diffbar.
- f heißt holomorph auf der (offenen) Menge $M \subset \mathbb{C}$. $:\Leftrightarrow f$ ist in jedem $z \in M$ holomorph. Bezeichnung: $f \in H(M)$

Bem.: f ist auf $M = \mathring{M}$ holomorph $\Leftrightarrow$ f ist diffbar auf M.