**Satz: (Differentation von Potenzreihen)**

Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ habe einen Konvergenzradius $R > 0$.

Beh.:

- $f(z)$ ist holomorph auf der offenen Kreisscheibe $U_R(z_0)$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall z \in U_R(z_0)$ existiert
$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, n(n-1) \dots (n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$
wobei die Potenzreihe den Konvergenzradius $R$ hat.
- $\forall k \in \mathbb{N}_0$ ist $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

Beweis: Sei ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Wählen $z, z+h \in \mathbb{C}, h \neq 0$ und $r$ mit $|z|, |z|+|h| < r < R$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$$

$\Rightarrow$ Die Folge $\{|a_n| r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und erst recht $\forall n \in \mathbb{N}$
$$|a_n| r^{n-1} \leq K \in \mathbb{R}$$

Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ $(n \to \infty)$ hat die Potenzreihe
$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n \, a_n z^{n-1}, \quad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}}$$

denselben Konvergenzradius $R$ wie $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$

$\Rightarrow$

$$D=D(z,h):=\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(\frac{(z+h)^n-z^n}{h}-nz^{n-1}\right)$$

$n=0:\ a_0\left(\frac{\overbrace{(z+h)^0}^{1}-\overbrace{z^0}^{1}}{h}\right)=0$

$n=1:\ a_1\left(\frac{z+h-z}{h}-1z^0\right)=0$

$$(z+h)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k z^{n-k}=1\cdot h^0 z^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k z^{n-k}$$

$$\Rightarrow \frac{(z+h)^n-z^n}{h}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}z^{n-k}=n\underbrace{h^0}_{1}z^{n-1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}z^{n-k}$$

$\Rightarrow$

$$D=\sum_{n=2}^{\infty}a_n\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}z^{n-k}$$

$$|D|\le\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}|h|^{k-1}|z|^{n-k}$$

Mit $\xi:=\frac{|z|}{r}$, $\eta:=\frac{|h|}{r}$ $\Rightarrow$ $0\le\xi,\ \xi+\eta<1$

$$|D| \le \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{|a_n| r^{n-1}}_{\le K} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \eta^{k-1} \xi^{n-k}$$

$$\le K \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \eta^{k-1} \xi^{n-k} = K \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\xi+\eta)^n - \xi^n}{\eta} - n\xi^{n-1}$$

$$= K \left( \frac{1}{\eta} \left( \sum_{n=2}^{\infty} (\xi+\eta)^n - \sum_{n=2}^{\infty} \xi^n \right) - \sum_{n=2}^{\infty} n \xi^{n-1} \right)$$

$$\left( \text{NR: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1 \quad \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2} \quad \text{folgt nach Diff. nach } x \text{ aus } \sum_{n=1}^{N} n x^{n-1} = \dots \right.$$

$$\left. \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} \right)$$

$$= K \left( \frac{1}{\eta} \left( \frac{(\xi+\eta)^2}{1-\xi-\eta} - \frac{\xi^2}{1-\xi} \right) - \frac{\xi(2-\xi)}{(\xi-1)^2} \right) \quad \text{(nach kurzer schwerer Rechng)}$$

$$= \frac{K\eta}{(1-\xi-\eta)(1-\xi)^2} \to 0 \quad \text{für } \eta \to 0$$

$\blacksquare$

Beispiele: • geometrische Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

$$\Rightarrow f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} = \left(f(z)\right)^2$$

• exp-Fkt:

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

und analog $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$.

<u>Satz</u>: Stetigkeit der Umkehrabbildung

Vor.: Seien $A, B \subset \mathbb{C}$, $A$ kompakt $\neq \emptyset$ und $f: A \to B$ bijektiv und stetig auf $A$

Beh.: $f^{-1}: B \to A$ ist stetig auf $B$ (kompakt)

Beweis: Annahme: $f^{-1}$ ist unstetig in $w_0 \in B$.

$\Rightarrow \exists\, w_n \in B$, $w_n \neq w_0$ $w_n \to w_0$ mit $z_n := f^{-1}(w_n) \not\to z_0 := f^{-1}(w_0)$ für $n \to \infty$

Da $A$ kompakt ist, $\exists$ konvergente Teilfolge $z_{n_k} = f^{-1}(w_{n_k}) \to z_0'$ ($n_k \to \infty$, $k \to \infty$) und $z_0' \neq z_0$.

$f$ stetig auf $A \Rightarrow w_{n_k} = f(z_{n_k}) \to f(z_0')$ $k \to \infty$.

Nach Def. von $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $(w_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{k\to\infty} w_0 = f(z_0)$

$\Rightarrow f(z_0) = f(z_0')$, $z_0 \neq z_0'$ im Widerspruch zur Bijektivität von $f$ ■

<u>Anwendung:</u> Die Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

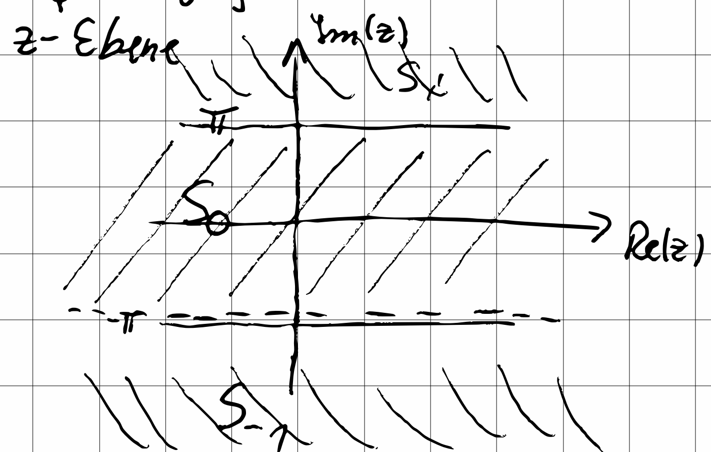
$$w = f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad z = x+iy$$

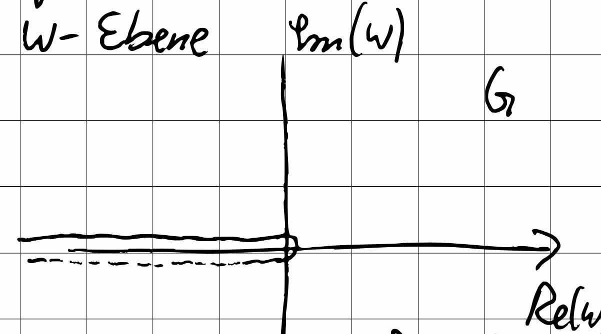
ist eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe und periodische Funktion mit der (imaginären) Periode $2\pi i$.

Durch $f$ wird jeder Periodenstreifen

$S_k := \{ z = x+iy \in \mathbb{C} : -\infty < x < \infty,\ 2k\pi - \pi < y \leq 2k\pi + \pi \}$ $k \in \mathbb{Z}$

auf $G \setminus \{0\}$ umkehrbar eindeutig abgebildet




$w = e^z$ nimmt jeden von 0 verschiedenen Wert in jedem Periodenstreifen genau einmal an.

$\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Umkehrfunktionen (= Zweig der mehrdeutigen Umkehrfunktion) von $e^z$.

Beachte $\mathring{S}_k$ wird bijektiv auf $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ abgebildet.

**Def:** Die wegen obigem Satz stetige Umkehrfunktion von $e^z : \mathring{S}_0 \to \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ heißt Hauptzweig der Logarithmusfunktion $\log w : \mathbb{C}\setminus(-\infty,0] \to \mathring{S}_0$.

Folgerung: • Es gilt $e^{\log(z)} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

$$\log e^z = z \quad \forall z \in \mathring{S}_0.$$

• Nun gilt $(e^z)' = e^z \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dw}\log(w)\Big|_{w=w_0} = \frac{1}{(e^z)'}\Big|_{z=z_0=\log w_0} = \frac{1}{e^{\log w_0}} = \frac{1}{w_0}$$

• Aus $\log z = s + it \Rightarrow z = e^{\log z} = e^s(\cos t + i\sin t)$

$|z| = e^s$, $s = \log|z|$, $t = \arg(z)$, $-\pi < \arg z < \pi$

$\Rightarrow \log z = \log|z| + i\arg z$ ist holomorph mit $(\log z)' = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.