- **Die allgemeine Potenzfunktion**

1) Für $a>0$, $b\in\mathbb{C}$ sei mit $\log a \in \mathbb{R}$ $\quad a^b := e^{b\log a}$

2) Für $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$ sei $\pi < \arg a \leq \pi$ $\quad a^b := e^{b\log a} = e^{b(\log|a| + i\arg a)}$

3) Für a, $b=b_1+ib_2\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ sei $-\pi<\arg a\leq\pi$

$$a^b := e^{b\log a} = e^{b_1(\log|a| - b_2\arg a) + i(b_2\log|a| + b_1\arg a)}$$

Def: • Für $a\in\mathbb{C}$, $a\neq 0$ sei

$$a^z := e^{z\log a} = e^{z(\log|a| + i\arg a)}$$

mit festem $-\pi<\arg a\leq\pi$ die allgemeine Exponentialfunktion.

• Für $b\in\mathbb{C}$ sei $z^b := e^{b\log z} = e^{b(\log|z| + i\arg z)}$

mit $-\pi<\arg z\leq\pi$ die allgemeine Potenzfunktion.

Bemerkungen:

- a^z ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und $(a^z)' = (e^{z\log a})' = e^{z\log a}\cdot\log a$
$$= a^z\log a$$

- Für $a\neq 1$ ist die Umkehrfunktion von a^z gegeben durch $\frac{\log z}{\log a}$ für $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ denn

$$a^{\frac{\log z}{\log a}} = e^{\frac{\log z}{\log a}\log a} = e^{\log z} = z$$

- z^b ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0] = \{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} : -\pi<\arg z\leq\pi\}$ und
$$(z^b)' = (e^{b\log z})' = e^{b\log z}\cdot\frac{b}{z} = z^b\cdot\frac{b}{z} = b z^{b-1}$$

II.2. Die Cauchy-Riemannsche Dgl. und harmonische Funktionen

Satz: (Cauchy-Riemannsche-Differentialgleichungen)

Vor.: Sei $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) : M \to \mathbb{C}$ gegeben mit $M \subset \mathbb{C}$.

Beh.: 1) f ist in $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathring{M}$ diffbar $\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ und $v(x,y)$ sind in (x_0, y_0) total diffbar und erfüllen:

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$$
$$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0).$$

2) f ist holomorph auf der offenen Menge $M = \mathring{M}$
$\Longleftrightarrow$ u und v sind auf M total differenzierbar und erfüllen die part. Dgl.

$$u_x(x,y) = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad \forall (x,y) \in M \subset \mathbb{R}^2$$

Beweis: 1) $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ mit $z = x+iy$ ist in $z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathring{M}$ diffbar mit der Ableitung

$$f'(z_0) = a_1 + i a_2 \Longleftrightarrow \exists\, r(z) = r_1(x,y) + i\, r_2(x,y) : M \to \mathbb{C}$$
$$\text{mit } \frac{r(z)}{z - z_0} \to 0 \quad \text{für } z \to z_0$$

und

$$f(z) = f(z_0) + (a_1 + i a_2)\big((x-x_0) + i(y-y_0)\big) + r(z)$$
$$= f(z_0) + a_1(x-x_0) - a_2(y-y_0) + i\, a_1(y-y_0) + i a_2(x-x_0) + r(z)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x,y) \\ r_2(x,y) \end{pmatrix}$$

und $\frac{1}{z-z_0} \begin{pmatrix} r_1(x,y) \\ r_2(x,y) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z \to z_0$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ ist in $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathring{M}$ total diffbar mit der

Ableitungsmatrix $\begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$

d.h. $u_x(x_0,y_0) = a_1 = v_y(x_0,y_0)$

$u_y(x_0,y_0) = -a_2 = -v_x(x_0,y_0)$.

2.) folgt 1.) mit variablem $z_0 \in M$. ∎

Bemerkung:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0) + i\big(v(x,y_0) - v(x_0,y_0)\big)}{x - x_0}$$

$$= u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0+iy) - f(x_0+iy_0)}{i(y-y_0)}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0) + i\big(v(x_0,y) - v(x_0,y_0)\big)}{i(y-y_0)}$$

$$= \frac{1}{i}\big(u_y(x_0,y_0) + i\, v_y(x_0,y_0)\big)$$

$$= v_y(x_0,y_0) - i\, u_y(x_0,y_0).$$

$\Rightarrow u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$

und $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$.

$\square$

Beispiel: $f(z) = |z|^2 \qquad z \in \mathbb{C}$

$z = x + iy$

$u(x,y) = x^2 + y^2 \quad , \; v(x,y) = 0$

$f(z) = (x^2+y^2) + i\,0 = u(x,y) + i\,v(x,y) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \; u_x(x,y) = 2x \qquad u_y(x,y) = 2y$

$\quad\;\; v_x(x,y) = 0 \qquad v_y(x,y) = 0$

$\Rightarrow$ Die Cauchy-Riemannschen Dgl. sind in keinem Pkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ erfüllt.

$\Rightarrow$ $f(z)$ ist für kein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ diffbar, also in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph.

Aber f ist wegen $\dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \dfrac{|z|^2}{z} = \bar{z} \to 0$ für $z \to 0$

im Pkt. $z_0 = 0$ diffbar.

Beachte: $f(x) = |x|^2 = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ ist in ganz $\mathbb{R}$ diffbar.

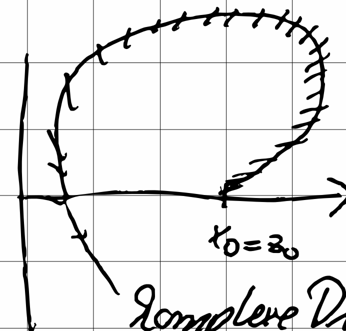
Die reelle Diffbarkeit verlangt lediglich die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

für jede reelle Nullfolge $\{h_n\}$ $(h_n \neq 0)$ während im Komplexen

Fall beliebige komplexe Nullfolgen $\{h_n\}$ $(h_n \neq 0)$ zugelassen werden müssen.

reelle Diffbarkeit



komplexe Diffbarkeit

Def.: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Eine Funktion $u: G \to \mathbb{R}$ heißt <u>harmonisch</u> auf G

$\iff$ $u \in C^2(G)$ und erfüllt die Laplace-Dgl.

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in G.$$

Satz: Vor.: Sei $f = u + iv \quad G \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem Gebiet G und sei $u, v \in C_2(G)$

Beh.: u und v sind harmonisch auf G.

Beweis: Mit den Cauchy-Riemannschen Dgl. und dem Satz von Schwarz ergibt sich

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y) = \frac{\partial}{\partial x} v_y + \frac{\partial}{\partial y}(-v_x) = v_{yx} - v_{xy} = 0 \quad \text{auf } G$$

und analog

$$\Delta v = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = \frac{\partial}{\partial x}(-u_y) + \frac{\partial}{\partial y} u_x = -u_{yx} + u_{xy} = 0 \quad \text{auf } G.$$

∎